ABSTRAKTE SOBOLEV–RÄUME

und ihre Anwendung auf die Störungstheorie für Generatoren von C_0 –Halbgruppen

Dissertation
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Thomas Walther
aus Giengen

April 1986

ABSTRAKTE SOBOLEV–RÄUME

und ihre Anwendung auf die Störungstheorie für Generatoren von C_0 –Halbgruppen

Dissertation
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Thomas Walther
aus Giengen

April 1986

Tag der mündlichen Qualifikation: 24.6. 1986

Dekan:	Prof. Dr. P. Schmid
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. R. Nagel
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. M. Wolff

Inhaltsverzeichnis

Einleitung..... 2

1. Sobolev-Räume für abgeschlossene Operatoren..... 6

2. Sobolev-Räume für Generatoren..... 22

3. Favard-Klassen für Generatoren..... 31

4. Störung von Sobolev-Türmen..... 40

5. Ein abstrakter Volterra-Operator..... 54

6. Anwendungen und Beispiele..... 69

Literaturverzeichnis..... 81

Einleitung

In der im Jahre 1938 erschienenen Arbeit von S.L.Sobolev wurde für die Räume $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, ein Differenzierbarkeitsbegriff eingeführt, welcher zur Definition der klassischen Sobolev-Räume $W^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, führte (siehe Adams).

Diese Räume sind heute bei der Untersuchung partieller Differentialgleichungen nicht mehr wegzudenken, wobei schon einiges von S.L.Sobolev selbst in dessen verschiedenen Monographien behandelt wurde (Sobolev(2)-(4)). Weitere Anwendungen finden sich in der Arbeit von Y.Konishi sowie der Abhandlung von M.S.Birman/M.Z.Solomjak.

In der vorliegenden Arbeit werden "abstrakte" Sobolev-Räume für einen abgeschlossenen, dicht definierten Operators A mit Definitionsbereich D(A) auf einem Banachraum E eingeführt. Dabei ist A nicht notwendigerweise ein Differentialoperator, wie es bei den klassischen Sobolev-Räumen der Fall ist. Hierbei stehen die drei Begriffe

- Isomorphie
- Störung
- Nicht-Reflexivität

im Vordergrund und wirken in folgender Weise zusammen:

"Die Einführung isomorpher Räume liefert (insbesondere auf nicht-reflexiven Banachräumen) neue Störungssätze für Generatoren von C_0-Halbgruppen".

Paradebeispiele für obige Aussage sind Theorem 4.3 in Ver-

bindung mit Korollar 4.5 und Satz 5.14 mit dessen Anwendung in Korollar 6.15.

Es ist anzumerken, daß für die Störungstheorie von C_0-Halbgruppen auf reflexiven Banachräumen (insbesondere auf Hilberträumen) eine umfangreiche Literatur existiert (H.Sohr, N. Okazawa(1),(2), T.Kato(?), P.Hess). Dabei werden zum Beweis solcher Störungssätze oftmals Techniken benutzt und Annahmen gemacht, die im Falle nicht-reflexiver Banachräume wenig brauchbar sind, beispielsweise die Betrachtung schwach konvergenter Folgen oder die Annahme, daß der zum Operator A adjungierte Operator A' dicht definiert ist.

Für die Störungstheorie von C_0-Halbgruppen auf nicht-reflexiven Banachräumen ist neben dem Standardwerk von T.Kato (Kato(1)) die Arbeit von J.Voigt zu erwähnen. Bezüglich der Störung dissipativer Operatoren sind neben den Resultaten von T.Kato die Arbeiten von G.Lumer, G.Lumer/R.S.Phillips sowie P.R.Chernoff anzuführen.

Weitere Gesichtspunkte der Störungstheorie für unbeschränkte Operatoren finden sich in Chapter V der Monographie von S.Goldberg.

Die Störungstheorie für Generatoren auf geordneten Banachräumen und auf Banachverbänden wird in R.Nagel(2) behandelt (siehe auch H.H.Schaefer(2), sowie W.Arendt).

In Kapitel 1 werden mittels des Operators A, seinem Definitionsbereichs D(A) und seiner Resolvente $R(\lambda,A)$, $\lambda\in\rho(A)$, eine Folge zu E isomorpher Banachräume $(E_n^A)_{n\in\mathbb{Z}}$ definiert. Eine Verbindung zu den klassischen Sobolev-Räumen wird in Beispiel 1.17 hergestellt.

Die Räume $(E_n^A)_{n\in\mathbb{Z}}$, die als der zu A gehörende "Sobolev-Turm" bezeichnet werden, erlauben die Definition einer Folge von Operatoren $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, wobei jeder Operator A_n als Operator auf E_n^A eine Einschränkung ($n\geq 1$) bzw. eine stetige Fortsetzung ($n\leq -1$) von A ist. Außerdem wird mittels des adjungierten Operators A' ein "dualer Turm" $((E')_n^{A'})_{n\in\mathbb{Z}}$ konstruiert.

Diese Theorie wird in Kapitel 2 auf den Generator einer C_0-Halbgruppe $(T(t))$ $(t\geq 0)$ angewandt. Dies führt zur Konstruktion einer Folge von C_0-Halbgruppen $(T_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ auf den Räumen E_n^A (siehe R.Nagel(1)), wobei die Halbgruppen $(T_n(t))$ zur ursprünglichen Halbgruppe $(T(t))$ ähnlich sind (Satz 2.4).

Eine entscheidende Rolle bei dieser Konstruktion spielt die Resolvente $R(\lambda,A)$ $(\lambda\in\rho(A))$ des Generators A der Halbgruppe $(T(t))$. In Satz 2.10 erhalten wir dann eine mit dem Theorem von Hille-Yosida verwandte Charakterisierung von Generatoren.

Das dritte Kapitel befaßt sich mit einem der Approximationstheorie entlehnten Begriff, den Favard-Klassen (siehe Butzer/Berens, J.Favard), welche in diesem Zusammenhang ein wertvolles Hilfsmittel für die Behandlung von Halbgruppengeneratoren auf nicht-reflexiven Banachräumen darstellen (Satz 3.6). Dabei wird die im ersten Kapitel entwickelte Methode zur Konstruktion isomorpher Räume verwendet (Satz 3.3). Einen Zusammenhang mit den Favard-Klassen kann man in den "Interpolationsräumen" erkennen, die in Da Prato/Grisvard(1) definiert werden.

Die Kapitel 4, 5 und 6 liefern Störungssätze für den Operator A, wobei in Kapitel 6 der Schwerpunkt auf der Ausführung konkreter Beispiele liegt. Im vierten Kapitel wird als Zugang

die Untersuchung der (gestörten) Resolvente gewählt.

Ein wesentlicher Gesichtspunkt dabei ist die Untersuchung des Verhaltens der Räume $(E_n^A)_{n\in\mathbb{Z}}$ bei einer Störung des Operators A durch einen Operator B. Dies führt einerseits zu einer Verallgemeinerung eines von R.S.Phillips stammenden Störungssatzes (Korollar 4.5) und liefert andererseits einen weitergehenden Störungssatz für Generatoren holomopher Halbgruppen (Satz 4.12).

Im fünften Kapitel spielt ein abstrakter Volterra-Operator, welcher mit der Methode der Variation der Konstanten verwandt ist, eine Schlüsselrolle. Der wichtigste Satz (Satz 5.11) dieses Kapitels findet seine Anwendung in Satz 5.14, welcher eine Verallgemeinerung eines Resultats von Desch/Schappacher darstellt (Korollar 5.13).

Mit Hilfe von Satz 5.14 werden in Kapitel 6 "maß-wertige" (unbeschränkte) Störungen von Generatoren auf dem Raum $L^1(\mathbb{R})$ (Beispiel 6.14(c)) oder auf einem Unterraum von $BV(\mathbb{R})$, dem Dualraum von $C_0(\mathbb{R})$, behandelt. Hierbei kommt das im dritten Kapitel mittels der Favard-Klassen entwickelte Konzept voll zum Tragen.

Zwei Methoden zur Konstruktion beschränkter Störungen auf den Banach-Räumen $(E_n^A)_{n\in\mathbb{Z}}$ werden in den Propositionen 6.3 und 6.5 dargestellt, womit Theorem 4.3 sowie die Korollare 4.4 und 4.5 zur Anwendung kommen. Einige Beispiele dafür werden in 6.7 genannt.

□ □ □

Ich danke Herrn Prof. Dr. Rainer Nagel herzlich für sein großes Interesse an dieser Arbeit. Ferner danke ich der AG Funktionalanalysis für viele Anregungen und nützliche Diskussionen.

1. Sobolev-Räume für abgeschlossene Operatoren

Im folgenden sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $(A, D(A))$ ein abgeschlossener Operator auf E, wodurch $(D(A), \|\cdot\|^A)$ ein Banachraum wird. Dabei ist $\|x\|^A := \|x\| + \|Ax\|$ für alle $x \in D(A)$.

Weiterhin sei $\rho(A) \neq \emptyset$ und $\lambda \in \rho(A)$; d.h. der Operator $\lambda - A$ besitzt eine stetige Inverse, welche mit $R(\lambda, A)$ bezeichnet wird. Damit läßt sich folgende Norm definieren.

Definition 1.1: Für alle $x \in D(A)$ sei $\|x\|_1^A := \|(\lambda - A)x\|$.

Die $\|\cdot\|_1^A$-Norm hat folgende Eigenschaft.

Lemma 1.2: Die beiden Normen $\|\cdot\|_1^A$ und $\|\cdot\|^A$ sind äquivalent.

Beweis: $\|x\|_1^A = \|(\lambda - A)x\| \leq \|\lambda x\| + \|Ax\| \leq c\|x\|^A$,

wobei $c := \max\{|\lambda|, 1\}$ ist.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \|x\|^A &= \|x\| + \|Ax\| = \|R(\lambda, A)(\lambda - A)x\| + \|AR(\lambda, A)(\lambda - A)x\| \\ &= \|R(\lambda, A)(\lambda - A)x\| + \|(\lambda R(\lambda, A) - 1)(\lambda - A)x\| \\ &\leq ((1 + |\lambda|)\|R(\lambda, A)\| + 1)\|x\|_1^A. \end{aligned}$$

□

Aus Lemma 1.2 ergibt sich sofort

Bemerkung 1.3: Seien $\lambda, \mu \in \rho(A)$, $\lambda \neq \mu$. Dann existieren Konstanten $a, b > 0$, so daß für alle $x \in D(A)$ gilt:

$$a\|(\lambda - A)x\| \leq \|(\mu - A)x\| \leq b\|(\lambda - A)x\|.$$

Dies bedeutet, daß die zur Norm $\|\cdot\|_1^A$ gehörende Topologie unabhängig vom gewählten $\lambda\in\rho(A)$ ist. Daher macht die nächste Definition Sinn.

Definition 1.4: $E_1^A := (D(A), \|\cdot\|_1^A)$ sei der für ein $\lambda\in\rho(A)$ definierte normierte Raum. Aufgrund des Satzes vom abgeschlossenen Graphen und wegen Lemma 1.2 ist E_1^A ein Banachraum.

Unter diesen Bedingungen können wir mittels des Operators λ-A eine Folge von Banachräumen definieren.

Definition 1.5: Sei $n\in\mathbb{N}$. Definiere $E_n^A := (D(A^n), \|\cdot\|_n^A)$, wobei die Norm $\|\cdot\|_n^A$ definiert ist durch

$$\|x\|_n^A := \|(\lambda-A)^n x\|.$$

Die Räume E_n^A sind natürlich wieder Banachräume und der Operator $R(\lambda,A)^n$ bildet E bijektiv und isometrisch nach $D(A^n)$ ab. Die von der $\|\cdot\|_n^A$-Norm induzierte Topologie ist wiederum unabhängig von $\lambda\in\rho(A)$, denn aus dem nächsten Lemma folgt die Äquivalenz aller mittels $\lambda\in\rho(A)$ definierten $\|\cdot\|_n^A$-Normen.

Lemma 1.6: Es sei $n\in\mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n$ seien nicht-negative reelle Zahlen, wobei $a_0>0$ und $a_n>0$ sind. Dann gibt es Konstanten $a,b>0$, so daß gilt:

$$a\|x\|_n^A \le \sum_{k=0}^n a_k \|A^k x\| \le b\|x\|_n^A \quad \text{für alle } x\in E_n^A.$$

Insbesondere ist jede mit Hilfe eines $\lambda\in\rho(A)$ definierte $\|\cdot\|_n^A$-Norm äquivalent zur $\|\cdot\|_n^*$-Norm mit $\|x\|_n^* := \|x\| + \|A^n x\|$ für alle $x\in E_n^A$, woraus die Äquivalenz aller $\|\cdot\|_n^A$-Normen folgt.

Beweis: (1) Sei $x \in E_n^A$. Dann wird die Behauptung zunächst für $a_0=a_1=\ldots=a_n=1$ gezeigt, d.h. es gibt Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ mit

$$c_1 \|x\|_n^A \leq \sum_{k=0}^{n} \|A^k x\| \leq c_2 \|x\|_n^A. \tag{1.6.1}$$

Durch Anwendung der Dreiecksungleichung erhalten wir die erste Ungleichung. Weiterhin gibt es für $0 \leq k \leq n$ Konstanten $b_0, \ldots, b_{n-1}, c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}_+$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \|A^k x\| &= \|R(\lambda,A)^{n-k}(\lambda-A)^{n-k}A^k x\| \\ &= \|R(\lambda,A)^{n-k}((\lambda-A)^n - \sum_{i=0}^{n-1} b_i A^i)x\| \\ &\leq \|R(\lambda,A)^{n-k}\| \|x\|_n^A + \sum_{i=0}^{n-1} c_i \|A^i x\| . \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Somit existieren Konstanten $d, d_0, \ldots, d_{n-1} \in \mathbb{R}_+$, so daß gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \|A^k x\| \leq d \|x\|_n^A + \sum_{i=0}^{n-1} d_i \|A^i x\|.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens auf die auf der rechten Seite stehende Summe finden wir mit Hilfe der Abschätzung (1.6.2) Konstanten $\alpha, \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, so daß folgt:

$$\sum_{k=0}^{n} \|A^k x\| \leq \alpha \|x\|_n^A + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \|x\|_i^A. \tag{1.6.3}$$

Für $\|x\|_i^A$ mit $i=0,\ldots,n-1$ ergibt sich

$$\|x\|_i^A = \|(\lambda-A)^i x\| = \|R(\lambda,A)^{n-i}(\lambda-A)^n x\| \leq \|R(\lambda,A)^{n-i}\| \|x\|_n^A.$$

Damit finden wir mit Hilfe der Ungleichung (1.6.3) eine Konstante $c_2 > 0$, so daß gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \|A^k x\| \leq c_2 \|x\|_n^A.$$

(2) Wir zeigen, daß es eine Konstante $c>0$ gibt, so daß gilt:

$$\|x\|_n^A \leq c(\|x\| + \|A^n x\|).$$

Für $1 \leq k \leq n$ folgt

$$\begin{aligned} \|A^k x\| &= \|A^k R(\lambda,A)^{n-k}(\lambda-A)^{n-k}x\| \\ &= \|R(\lambda,A)^{n-k}A^k(\lambda-A)^{n-k}x\| \\ &= \|R(\lambda,A)^{n-k}\sum_{m=0}^{n-k}(-1)^m \lambda^m A^{n-m}x\| \\ &= \|\sum_{m=0}^{n-k} R(\lambda,A)^{n-k}(-1)^m \lambda^m A^{n-m}x\| \end{aligned}$$

$$\leq \|\sum_{m=1}^{n-k} R(\lambda,A)^{n-k}(-1)^m \lambda^m A^{n-m-k+1} A^{k-1}x\| + \delta\|A^n x\|$$

$$\leq \delta\|A^n x\| + \delta_1\|A^{k-1}\| \quad \text{für } \delta,\delta_1>0.$$

Durch Wiederholung dieser Rekursion erhalten wir unter Verwendung der ersten Ungleichung in (1.6.1) eine Konstante $c>0$, so daß $\|x\|_n^A \leq c(\|x\| + \|A^n x\|)$ ist.

(3) Mittels (1) und (2) ergeben sich folgende Ungleichungen:

$$\|x\|_n^A \leq c(\|x\| + \|A^n x\|) \leq \beta\sum_{k=0}^{n} a_k\|A^k x\| \quad \text{und}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\|A^k x\| \leq \gamma\sum_{k=0}^{n}\|A^k x\| \leq \gamma c_2\|x\|_n^A.$$

Dabei sind $\beta,\gamma>0$ und c,c_2 die in (1) und (2) bestimmten Konstanten. Werden $a := \beta^{-1}$ und $b := \gamma c_2$ gesetzt, dann folgt die Behauptung des Lemmas. □

Bemerkung 1.7: Falls A dicht definiert und $\lambda\in\rho(A)\neq\emptyset$ ist, dann liegt $D(A^n)$ dicht in E für alle $n\geq 2$, da mit $R(\lambda,A)(E) = D(A)$ auch $R(\lambda,A)^n(E) = D(A^n)$ dicht in E liegt.

Definition 1.8: Der metrische Raum (E_∞^A, d_∞) wird definiert als $E_\infty^A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n)$, wobei d_∞ die Fréchet-Metrik

$$d_\infty(x,y) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\|x-y\|_n^A(1+\|x-y\|_n^A)^{-1} \quad \text{ist.}$$

Dabei ist $\|x\|_0^A := \|x\|$. Aufgrund der Vollständigkeit aller E_n^A $(n\geq 0)$ ist E_∞^A ein Fréchet-Raum.

Die Strukturen von Fréchet-Räumen, betrachtet als topologische Vektorräume, werden eingehend in der Monographie von H.H.Schaefer(1) untersucht.

Die bisher für natürliche Zahlen konstruierte Folge (E_n^A) von Banachräumen läßt sich auf die negativen ganzen Zahlen fortsetzen (vergleiche mit Da Prato/Grisvard(2)).

Definition 1.9: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $E_{-n}^A := (E, \|\cdot\|_{-n}^A)^{\sim}$ definiert als die Vervollständigung von E unter der Norm $\|\cdot\|_{-n}^A$, wobei $\|x\|_{-n}^A := \|R(\lambda,A)^n x\|$ ist für alle $x \in E$ und ein $\lambda \in \rho(A)$.

Lemma 1.10: Ist die $\|\cdot\|_n^A$-Norm mittels $\lambda \in \rho(A)$ definiert, dann gilt für alle $n>0$:

(1) $R(\lambda,A)$ läßt sich stetig auf alle Elemente aus E_{-n}^A fortsetzen, und diese Fortsetzung ist eine Isometrie von E_{-n}^A nach E_{-n+1}^A.

(2) Der Operator $(\lambda-A) \in L(E_1^A, E)$ ist stetig fortsetzbar zu einem Operator aus $L(E_{-n+1}^A, E_{-n}^A)$, und diese Fortsetzung ist eine Isometrie.

(3) Für alle $\mu \in \rho(A)$ ist $R(\mu,A)$ stetig auf alle Elemente aus E_{-n}^A fortsetzbar und $(\mu-A)$ läßt sich stetig fortsetzen zu einem Element aus $L(E_{-n+1}^A, E_{-n}^A)$.

Beweis: (1) Für alle $x \in E$ gilt

$$\|R(\lambda,A)x\|_{-n}^A = \|R(\lambda,A)^{n+1}x\| \leq \|R(\lambda,A)\| \|x\|_{-n}^A \quad \text{und}$$
$$\|x\|_{-n}^A = \|R(\lambda,A)^{n-1}R(\lambda,A)x\| = \|R(\lambda,A)x\|_{-n+1}^A.$$

Da E per Definition dicht liegt in E_{-n}^A, folgt die stetige Fortsetzbarkeit von $R(\lambda,A)$ auf E_{-n}^A.

(2) Für alle $x \in E_1^A$ folgt

$$\|(\lambda-A)x\|_{-n}^A = \|R(\lambda,A)^n(\lambda-A)x\| = \|R(\lambda,A)^{n-1}x\| = \|x\|_{-n+1}^A. \quad (*)$$

Da E_1^A dicht in E und E dicht in E_{-n+1}^A liegt und da die

$\|\cdot\|_1^A$-Norm feiner als die Norm $\|\cdot\|$ auf E und diese wiederum feiner als die $\|\cdot\|_{-n+1}^A$-Norm ist, liegt E_1^A dicht in E_{-n+1}^A. Daraus ergibt sich die stetige Fortsetzbarkeit von $(\lambda-A)$ zu einem Element aus $\mathcal{L}(E_{-n+1}^A, E_{-n}^A)$. Mit (*) folgt die Isometrieeigenschaft dieser stetigen Fortsetzung.

(3) Ist $\mu\in\rho(A)$, dann kommutieren $\mu-A$ und $R(\mu,A)$ mit $R(\lambda,A)$ auf E bzw. auf E_1^A, weshalb der Beweis der Fortsetzbarkeit analog zu (1) und (2) verläuft. □

Bezeichnungen 1.11: (1) Die zu A konstruierten Räume E_n^A werden als die zu A und E gehörenden Sobolev-Räume und die Folge $(E_n^A)_{n\in\mathbb{Z}}$ als Sobolev-Turm bezeichnet. Dabei wird E_n^A die n-te Stufe des Sobolev-Turms genannt, wobei die 0-te Stufe gleich E ist.

(2) Für $n,m\in\mathbb{Z}$ und einen Operator $T\in\mathcal{L}(E_n^A, E_m^A)$ bezeichnen wir die Operatornorm von T mit $\|T\|_{n,m}$.

(3) Für $n\in\mathbb{Z}$ werden die Einschränkungen bzw. die stetigen Fortsetzungen der Operatoren A, $(\lambda-A)$ und $R(\lambda,A)$ auf E_n^A mit A_{n-1}, $(\lambda-A)_{n-1}$ und $R(\lambda-A)_n$ bezeichnet. Damit ist $A_0 = A$ und $R(\lambda,A)_0 = R(\lambda,A)$. Entsprechend werden für alle $\mu\in\rho(A)$ die stetigen Fortsetzungen bzw. die Einschränkungen von $\mu-A$ und $R(\mu,A)$ auf E_n^A mit $(\mu-A)_{n-1}$ und $R(\mu,A)_n$ bezeichnet.

Zusammenfassend ergibt sich damit folgender Satz.

Satz 1.12: Für einen abgeschlossenen, dicht definierten Operator $(A,D(A))$ mit $\lambda\in\rho(A)\neq\emptyset$ sind die zugehörigen Sobolev-Räume E_n^A alle isometrisch isomorph. Der Isomorphismus zwi-

schen E_m^A und E_n^A ist für $m>n$ durch $((\lambda-A)_n)^{m-n}$ gegeben. Insbesondere gilt:

(i) $(E_n^A)_m^{A_n} \cong E_{n+m}^A$ für alle $n,m\in\mathbb{Z}$.

(ii) E_m^A liegt dicht in E_n^A für $m>n$.

Beweis: (1) Für alle $n\in\mathbb{Z}$ und alle $x\in E_{n+1}^A$ gilt

$$(\lambda-A)_{n+1}R(\lambda,A)_{n+1}x = R(\lambda-A)_n(\lambda-A)_n x = x,$$

was sich für $n\geq 0$ aus Bemerkung 1.7 und für $n<0$ aus Lemma 1.10(1),(2) und der Dichtheit von E in E_n^A ergibt. Damit ist $(\lambda-A)_n: E_{n+1}^A \to E_n^A$ bijektiv und nach 1.10(2) eine Isometrie, womit die Behauptung für $m=n+1$ gezeigt worden ist. Für $m>n+1$ ergibt sich der Isomorphismus von E_m^A nach E_n^A durch folgende Komposition:

$$(\lambda-A)_n(\lambda-A)_{n+1}\cdots(\lambda-A)_{m-1} = ((\lambda-A)_n)^{m-n}.$$

(2) Es gilt $D(A_n) = E_{n+1}^A$, was sich für $n>0$ aus der Definition von $D(A_n)$ und für $n<0$ aus der stetigen Fortsetzbarkeit von A zu einem Element aus $L(E_{n+1}^A, E_n^A)$ und der Bijektivität von $(\lambda-A)_n$ ergibt. Damit gilt

$$(\lambda-A_n) = (\lambda-A)_n \text{ und } (\lambda-A_n)^{-1} = R(\lambda,A_n) = R(\lambda,A)_n.$$

Ist $\|x\|^\# := \|x\|_n^A$ für $x\in E_n^A$, dann folgt für $x\in E_{n+1}^A$

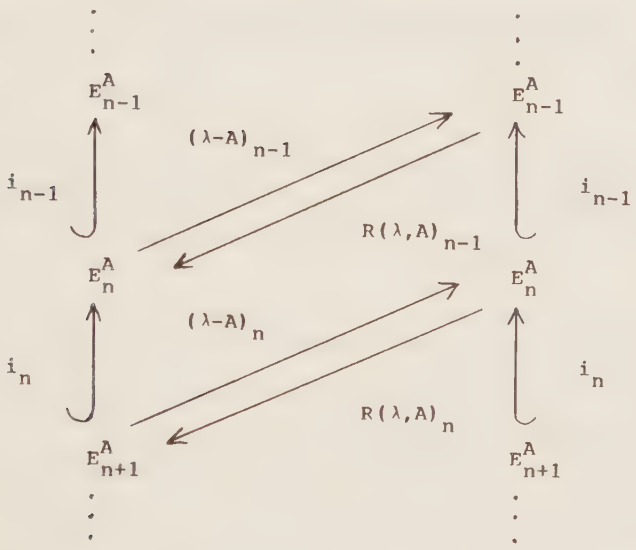
$$(\|x\|^\#)_1^{A_n} = \|(\lambda-A_n)x\|^\# = \|(\lambda-A)_n x\|_n^A = \|x\|_{n+1}^A \quad \text{und}$$

$$(\|x\|^\#)_{-1}^{(A_n)} = \|R(\lambda,A_n)x\|^\# = \|R(\lambda,A)_n x\|^\#$$
$$= \|R(\lambda,A)_n x\|_n^A = \|x\|_{n-1}^A.$$

Damit ist die Behauptung (i) für $n=1$ und $n=-1$ bewiesen, woraus induktiv folgt, daß sie für alle $n\in\mathbb{Z}$ gilt.

(3) Die Behauptung (ii) ist klar nach Definition 1.9 und Bemerkung 1.7, da die $\|\cdot\|_m^A$-Norm feiner ist als die $\|\cdot\|_n^A$-Norm für $m>n$. □

Der zu einem solchen Operator A gehörige Sobolev-Turm wird durch folgendes Diagramm veranschaulicht, wobei $n \in \mathbb{Z}$ ist und $i_n: E^A_{n+1} \to E^A_n$ die kanonische Injektion bezeichnet.



Für alle $\mu \in \rho(A)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist $R(\mu,A)^n \in L(E,E^A_n)$, was sich aus Lemma 1.6 folgern läßt, da alle $\|\cdot\|^A_n$-Normen äquivalent sind. Aus der Resolventengleichung ergibt sich weiter

Proposition 1.13: Sei $\lambda \neq \mu$ mit $\lambda,\mu \in \rho(A)$ und sei die $\|\cdot\|^A_n$-Norm mittels λ definiert. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(R(\lambda,A)-R(\mu,A))^n \in L(E,E^A_{2n}).$$

Beweis: Für A gilt die Resolventengleichung

$R(\lambda,A)-R(\mu,A) = (\mu-\lambda)R(\lambda,A)R(\mu,A)$, woraus folgt:

$$(R(\lambda,A)-R(\mu,A))^n = (\mu-\lambda)^n R(\lambda,A)^n R(\mu,A)^n.$$

Nach Satz 1.12 und wegen Lemma 1.6 bildet $R(\mu,A)^n$ den Raum

E bijektiv und stetig auf E_n^A ab und es gilt

$$R(\lambda,A)^n(E_n^A) = (R(\lambda,A)_n)^n(E_n^A) = E_{2n}^A.$$

Aus der Stetigkeit der Komposition folgt die Behauptung. □

Für beschränkte Operatoren auf E gilt folgende Charakterisierung.

Proposition 1.14: A ist genau dann aus $L(E)$, wenn für alle $n,m\in\mathbb{Z}$ gilt

$$E_n^A \cong E_m^A .$$

Beweis: A ist genau dann beschränkt, wenn $\|\cdot\|^A$ äquivalent ist zur Norm $\|\cdot\|$ auf E. Die Behauptung folgt dann aus Lemma 1.2 und der Definition der E_n^A. □

Für die Spektren der Operatoren A_n gilt folgendes.

Proposition 1.15: Für alle $n\in\mathbb{Z}$ ist $\sigma(A) = \sigma(A_n)$.

Beweis: Die Norm $\|\cdot\|_n^A$ sei mittels $\lambda\in\rho(A)$ definiert. Dann kommutiert für jedes $\mu\in\mathbb{C}$ der Operator $\mu-A_n = (\mu-A)_n$ mit den Isomorphismen $(\lambda-A)_n: E_{n+1}^A \to E_n^A$ und $R(\lambda,A)_n: E_n^A \to E_{n+1}^A$ in der Weise, daß gilt:

$$\begin{aligned}(\mu-A)_n &= (\mu-A)_n R(\lambda,A)_n(\lambda-A)_n = R(\lambda,A)_{n-1}(\mu-A)_{n-1}(\lambda-A)_n \\ &= (\lambda-A)_n R(\lambda,A)_n(\mu-A)_n = (\lambda-A)_n(\mu-A)_{n+1}R(\lambda,A)_{n+1}.\end{aligned}$$

Somit ist $(\mu-A)_n$ genau dann invertierbar, wenn $(\mu-A)_{n+1}$ und $(\mu-A)_{n-1}$ invertierbar sind, woraus induktiv die Behauptung folgt. □

Proposition 1.14 läßt sich wie folgt verschärfen.

Satz 1.16: Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei A abgeschlossen, dicht definiert mit $0 \in \rho(A)$. Gilt für alle $x \in E_n^A$

$$A^n x = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x) A^k x \quad \text{mit } c_k(x) \in \mathbb{C}, \tag{1.16.1}$$

dann ist $A \in \mathcal{L}(E)$.

Beweis: Per Definition der E_n^A gilt $A^k(E_n^A) \subset E_{n-k}^A$. Da E_{n-k}^A ein linearer Teilraum von E ist, folgt wegen $k \leq n-1$

$$E_{n-k}^A \subset E_1^A \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x) A^k x \in E_1^A \quad \text{für alle } x \in E_n^A.$$

Da A invertierbar ist, bildet der Operator A^n den Raum E_n^A bijektiv auf E ab, was aus Proposition 1.15 in Verbindung mit Satz 1.12 hervorgeht. Daher ist $E_1^A = E$, woraus $A \in \mathcal{L}(E)$ folgt, da A abgeschlossen ist. □

Die Aussage des Satzes besteht darin, daß ein unbeschränkter Operator, für den die Voraussetzungen von Satz 1.16 gelten, niemals die Aussage (1.16.1) für alle $x \in E_n^A$ erfüllen kann. Für eine Anwendung siehe K.-J. Engel.

Als nächstes werden einige Beispiele von Sobolev-Türmen, die durch unbeschränkte Operatoren erzeugt werden, diskutiert.

Beispiele 1.17: (a) Sei $E := L^1(\mathbb{R}, d\nu)$ und sei A der Generator der Translationshalbgruppe auf E, wobei ν das Lebesgue-Maß ist. Dann stimmen die klassischen Sobolev-Räume $W^{n,1}(\mathbb{R})$ mit

den vom Generator A gemäß Definition 1.5 erzeugten Sobolev-Räumen E_n^A für alle $n\in\mathbb{N}$ überein, was aus der Äquivalenz der Normen, welche sich mittels Lemma 1.6 ergibt, folgt.

(b) Sei $E:= L^1([0,1],d\nu)$ und A die erste Ableitung auf E. Dann hat A für jeden Definitionsbereich, welcher die Menge $\{f\in E \mid f(s):= e^{as} \text{ mit } a\in\mathbb{C}\}$ enthält, leere Resolventenmenge und die Räume E_n^A existieren nicht im Sinne von Definition 1.5.

(c) Nun betrachten wir für $n\geq 1$ und $k\geq 1$ ein Gebiet Ω in $\mathbb{R}^k$, den Raum $W^{n,1}(\Omega)$ und den auf $E:= L^1(\Omega,d^k\nu)$ definierten Operator (A,D(A)) mit $A:= \sum_{i=0}^{k}(\partial/\partial x_i)$, wobei D(A) der maximale Definitionsbereich von A in E sei. Ist $\rho(A)\neq\emptyset$, dann existieren die Räume E_n^A für alle $n\in\mathbb{Z}$. Nach Lemma 1.6 ist die Norm $\|\cdot\|_n^A$ äquivalent zu der durch Id und A^n definierten Norm $\|\cdot\|_n^*$ auf E_n^A mit $\|x\|_n^*:= \|x\| + \|A^n x\|$. Da in dieser Norm i.a. nicht alle partiellen Ableitungen in jeder Reihenfolge auftauchen, ist sie i.a. nicht äquivalent zur Norm auf $W^{n,1}(\Omega)$ und es gilt i.a. $E_n^A \neq W^{n,1}(\Omega)$.

(d) Sei $E:= L^p(\mathbb{R},d\nu)$ mit $1\leq p\leq\infty$. Für den auf E definierten Multiplikator A mit $Af:= qf$ ist genau dann $\rho(A)$ nichtleer, wenn der Abschluß des essentiellen Wertebereichs von q nicht ganz $\mathbb{C}$ ist. In diesem Fall existieren die Räume E_n^A für alle $n\in\mathbb{Z}$. Ist speziell $|q|\geq\epsilon>0$, dann ist $0\in\rho(A)$ und es gilt

$$E_n^A \cong L^p(\mathbb{R},q^{np}d\nu) \text{ für alle } n\in\mathbb{Z}.$$

Der folgende Abschnitt befaßt sich mit der Konstruktion von "dualen Sobolev-Räumen". Der naheliegende Weg, diese ein-

fach auf die gleiche Art und Weise mittels des zu A adjungierten Operators A' zu konstruieren, scheitert daran, daß D(A') i.a. nicht dicht in E' liegt, wenn E nicht reflexiv ist. Ist $E = L^1(\mathbb{R})$, dann ist A' aufgrund eines Resultats von H.P.Lotz nie dicht definiert, wenn A ein unbeschränkter Generator ist (siehe auch T.Coulhon). Daher kann die Aussage (ii) in Satz 1.12 für eine solche Konstruktion nicht mehr gelten. Auf den Spezialfall, daß E reflexiv ist, wird in den Korollaren 1.25 und 1.26 eingegangen.

Definition 1.18: Sei $n \in \mathbb{Z}$ und U_{-n} die Einheitskugel in E^A_{-n}. Die Banachräume $(E')^{A'}_n$ werden definiert als der Dual der Banachräume E^A_{-n}, d.h.

$$(E')^{A'}_n := (E^A_{-n})' \quad \text{mit} \quad \|x'\|^{A'}_n := \sup_{x \in U_{-n}} |x'(x)|.$$

Insbesondere ergibt sich für $(E')^{A'}_1$ folgender interessante Sachverhalt.

Satz 1.19: Es gilt $(E')^{A'}_1 \cong (D(A'), \|\cdot\|^{A'}_1)$, wobei die Norm auf D(A') mittels desselben $\lambda \in \rho(A')$ definiert wird, welches zur Definition der Isomorphismen zwischen den Räumen E^A_n benutzt wurde. Weiterhin ist $x'(x) = \langle x', x \rangle$ für alle $x' \in D(A')$ und $x \in E$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die zum dualen Paar (E,E') gehörende Bilinearform ist.

Beweis: Nach Konstruktion liegt der Raum E dicht in E^A_{-1}.

Daher genügt es, $x \in E$ zu betrachten. Es folgt:

(1) Für $x' \in D(A')$ gilt

$$|\langle x,x'\rangle| = |\langle(\lambda-A)y,x'\rangle| \quad \text{für ein } y \in D(A),$$

$$\leq c\|y\|\|x'\|_{E'}, \quad \text{da } x' \in D(A') \subset E' \text{ ist,}$$

$$= c\|R(\lambda,A)x\|\|x'\|_{E'} = d\|x\|_{-1}^{A}, \text{ wobei } c,d \in \mathbb{R}_+ \text{ sind.}$$

Damit ist x' stetiges lineares Funktional auf E_{-1}^{A}.

(2) Sei $x \in D(A)$ und $x' \in (E_{-1}^{A})'$. Dann folgt

$$|\langle Ax,x'\rangle| = |\langle \lambda x,x'\rangle - \langle(\lambda-A)x,x'\rangle|$$

$$\leq (|\lambda|\|x\|_{-1}^{A} + \|(\lambda-A)x\|_{-1}^{A})\|x'\|$$

$$\leq (|\lambda|\|R(\lambda,A)x\| + \|x\|)\|x'\|$$

$$\leq c_1\|x\| \text{ für ein } c_1 > 0.$$

Somit ist $x' \in D(A')$, wobei $\|x'\|$ die Norm von x' in $(E_{-1}^{A})'$ ist.

(3) Die Normen der beiden Räume stimmen überein, denn es gilt

$$\|x'\| = \sup_{x \in E,\, \|x\|_{-1}^{A} \leq 1} \{|\langle x,x'\rangle|\} = \sup_{y \in D(A),\, \|y\| \leq 1} \{|\langle(\lambda-A)y,x'\rangle|\}$$

$$= \sup_{y \in D(A),\, \|y\| \leq 1} \{|\langle y,(\lambda-A')x'\rangle|\} = \|(\lambda-A')x'\|_{E'} = \|x'\|_{1}^{A'}.$$

□

Ausgangspunkt für die weiteren Untersuchungen ist das folgende bekannte Lemma.

Lemma 1.20: Seien E,F Banachräume und sei $T: E \to F$ ein linearer Operator. Dann ist T genau dann ein isometrischer Isomorphismus, wenn der zu T adjungierte Operator T' ein isometrischer Isomorphismus von F' nach E' ist.

Aus diesem Lemma folgt sofort das Analogon zu Satz 1.12 für die Räume $(E')_n^{A'}$, wobei zu beachten ist, daß eine Aussage wie in 1.12(ii) i.a. nicht gilt.

Satz 1.21: Für $n\in\mathbb{Z}$ sind die Banachräume $(E')_n^{A'}$ alle isometrisch isomorph und $((R(\lambda,A)_{-n})^n)'\colon E' \to (E')_n^{A'}$ ist der Isomorphismus zwischen E' und $(E')_n^{A'}$, d.h. die Adjungierte des Isomorphismus' zwischen E_{-n}^A und E.

Der folgende Satz verallgemeinert Satz 1.19 und folgt aus Satz 1.21.

Satz 1.22: Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt $(E')_n^{A'} = (D((A')^n), \|\cdot\|_n^{A'})$. Dabei ist $\|x'\|_n^{A'} := \|(\lambda-A')^n x'\|_{E'}$, wobei $\lambda\in\rho(A')$ dasselbe λ ist, welches zur Definition der Isomorphismen zwischen den Räumen E_n^A benutzt wurde.

Für $n<0$ ist, wie schon erwähnt, $(E')_n^{A'}$ i.a. nicht die Vervollständigung von E' unter der $\|\cdot\|_{-1}^{A'}$-Norm, sondern es gilt nur eine schwächere Aussage.

Satz 1.23: Sei $n<0$. Dann ist $x'\in E'$ ein stetiges lineares Funktional auf E_{-n}^A und es gilt $\|x'\|_n^{A'} = \|R(\lambda,A')^{-n}x'\|_{E'}$.

Beweis: (1) Es ist nach Konstruktion klar, daß $x'\in(E')_n^{A'}$ ist.
(2) Sei $\|x'\|_n$ die Norm von $x'\in E'$, wenn x' als Element aus $(E')_n^{A'}$ betrachtet wird. Damit folgt

$$\|x'\|_n = \sup_{x\in E^A_{-n},\,\|x\|^A_{-n}\le 1} \{|\langle x,x'\rangle|\} = \sup_{y\in E,\,\|y\|\le 1} \{|\langle R(\lambda,A)^{-n}y,x'\rangle|\}$$

$$= \sup_{y\in E,\,\|y\|\le 1} \{|\langle y,R(\lambda,A')^{-n}x'\rangle|\} = \|R(\lambda,A')^{-n}x'\|_{E'} .$$

□

Falls A' dicht definiert ist, dann lassen sich die Banachräume $(E')^{A'}_n$ auf die gleiche Art darstellen wie die Räume E^A_n.

Satz 1.24: Sei $n<0$ und A' dicht definiert. Dann sind die Räume $(E')^{A'}_n$ die Vervollständigung von E' unter Norm $\|\cdot\|^{A'}_n$. Insbesondere gilt das Analogon zu Satz 1.12(ii), d.h. $(E')^{A'}_k$ liegt dicht in $(E')^{A'}_m$ für alle $k>m$ und $k,m\in\mathbb{Z}$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß E' dicht in $(E')^{A'}_n$ liegt.
Sei $y'\in(E')^{A'}_n$. Da $(R(\lambda,A')_n)^{-n}$ den Raum $(E')^{A'}_n$ bijektiv auf E' abbildet, gibt es zu y' genau ein $x'\in E'$ mit $x'=(R(\lambda,A')_n)^{-n}y'$.
Da A' dicht definiert ist, ist $R(\lambda,A')^{-n}(E') = (E')^{A'}_{-n}$ ebenfalls dicht in E', was bewirkt, daß zu x' eine Folge $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (E')^{A'}_{-n}$ existiert mit

$$\|x'-x'_k\|_{E'} \to 0 \quad \text{für } k\to\infty.$$

Wird $y'_k := (\lambda-A')^{-n}x'_k$ gesetzt, dann gilt

$$\|y'-y'_k\|^{A'}_n \to 0 \text{ für } k\to\infty, \text{ was zu zeigen war.}$$

□

Wenn E reflexiv ist, dann ist A' unter den gegebenen Voraussetzungen dicht definiert und wir erhalten das folgende Korollar.

Korollar 1.25: Sei E reflexiv und $n,m \in \mathbb{Z}$. Dann liegt $(E')_m^{A'}$ dicht in $(E')_n^{A'}$ für $m>n$ und es gilt für alle $n>0$ und alle $x' \in (E')_n^{A'}$

$$\|x'\|_n^{A'} = \|(\lambda - A')^n x'\|_{E'} .$$

Insbesondere gilt die Aussage für Hilberträume, für die noch der folgende Spezialfall zu erwähnen ist.

Korollar 1.26: Ist E ein Hilbertraum und A ein dicht definierter selbstadjungierter Operator auf E, dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$E_n^A \cong (E_{-n}^A)' .$$

Beweis: Gemäß Definition 1.18 ist $(E')_n^{A'} = (E_{-n}^A)'$. Wegen $A = A'$ folgt damit $(E')_n^{A'} \cong (E')_n^A$. Da E ein Hilbertraum ist, gilt $(E')_n^A \cong E_n^A$, woraus sich die Behauptung ergibt.

□

2. Sobolev-Räume für Generatoren

Im folgenden sei $(A,D(A))$ Generator einer stark-stetigen Halbgruppe $(T(t))$ auf einem Banachraum E. Dann können zu A gemäß der Konstruktion in Kapitel 1 die Sobolev-Räume $(E_n^A)_{n\in\mathbb{Z}}$ gebildet werden, wobei A_n für $n>0$ die Einschränkung auf E_{n+1}^A und für $n<0$ die Fortsetzung von A auf E_{n+1}^A gemäß Lemma 1.10 und Bezeichnung 1.11 ist. Entsprechendes wird nun für die Halbgruppe $(T(t))$ durchgeführt.

Definition 2.1: Sei $n\in\mathbb{N}$. Dann ist $(T_n(t))$ definiert als die Einschränkung von $(T(t))$ auf E_n^A, d.h. für jedes $t\geq 0$ gilt

$$T_n(t)x := T(t)x \text{ für alle } x\in E_n^A.$$

Proposition 2.2: Für alle $n\in\mathbb{N}$ ist $(T_n(t))$ eine stark-stetige Halbgruppe auf E_n^A und der Generator von $(T_n(t))$ ist der Operator A_n mit $D(A_n) = E_{n+1}^A$.

Beweis: Die Banachräume E_n^A seien mittels $\lambda\in\rho(A)$ definiert.

Da $T(t)$ für alle $t>0$ mit der $R(\lambda,A)$ kommutiert, gibt es für alle $x\in E_n^A$ ein $y\in E$, so daß gilt:

$$T_n(t)x = T_n(t)R(\lambda,A)^n y = R(\lambda,A)^n T(t)y.$$

Damit ist $T_n(t)$ eine Abbildung von E_n^A nach E_n^A und es folgt weiter für alle $x\in E_n^A$

$$\begin{aligned} T_n(t)x = T(t)x &= T(t)R(\lambda,A)^n((\lambda-A)_{n-1})^n x \\ &= R(\lambda,A)^n T(t)((\lambda-A)_{n-1})^n x, \end{aligned}$$

woraus geschlossen werden kann, daß

$$((\lambda-A)_{n-1})^n T_n(t)x = T(t)((\lambda-A)_{n-1})^n x \text{ ist,}$$

womit sich die Behauptung ergibt. □

Für $n<0$ gilt das folgende entsprechende Resultat.

Proposition 2.3: Sei $n<0$. Dann kann die Halbgruppe $(T(t))$ auf eindeutige Weise zu einer stark-stetigen Halbgruppe $(T_n(t))$ auf den Raum E_n^A fortgesetzt werden. Der Generator dieser Fortsetzung ist der Operator A_n mit $D(A_n) = E_{n+1}^A$.

Beweis: Ist E_n^A mittels $\lambda\in\rho(A)$ definiert, dann gilt für $x\in E$

$$(R(\lambda,A))_n)^{-n}T(t)x = R(\lambda,A)^{-n}T(t)x = T(t)R(\lambda,A)^{-n}x.$$

Da E dicht liegt in E_n^A, können die Operatoren $T(t)$ auf eindeutige Weise stetig auf den Raum E_n^A fortgesetzt werden. Somit ergibt sich für alle $x\in E_n^A$

$$T_n(t)x = ((\lambda-A)_n)^{-n}T(t)(R(\lambda,A)_n)^{-n}x,$$

wodurch sich alle Eigenschaften der Halbgruppe $(T(t))$ auf $(T_n(t))$ übertragen. □

Damit gilt für $n\in\mathbb{Z}$ und die Halbgruppen $(T_n(t))$ folgendes Analogon zu Satz 1.12.

Satz 2.4: Sei $n\in\mathbb{Z}$ und für $(T(t))$ gelte $\|T(t)\| \le Me^{\omega t}$, $M\ge 1, \omega\in\mathbb{R}$. Dann sind alle Halbgruppen $(T_n(t))$ ähnlich und es gilt insbesondere:

(1) $\|T_n(t)\|_{n,n} \le Me^{\omega t}$.

(2) $\sigma(T_n(t)) = \sigma(T(t))$ für alle $n\in\mathbb{Z}$ und alle $t>0$.

(3) Der gemäß Definition 1.8 zum Generator A gebildete Raum E_∞^A ist ein Gen von A_n für alle $n\in\mathbb{Z}$.

(4) $(T(t))$ ist genau dann differenzierbar (holomorph, u.ä.), wenn $(T_n(t))$ differenzierbar (holomorph, u.ä.) ist.

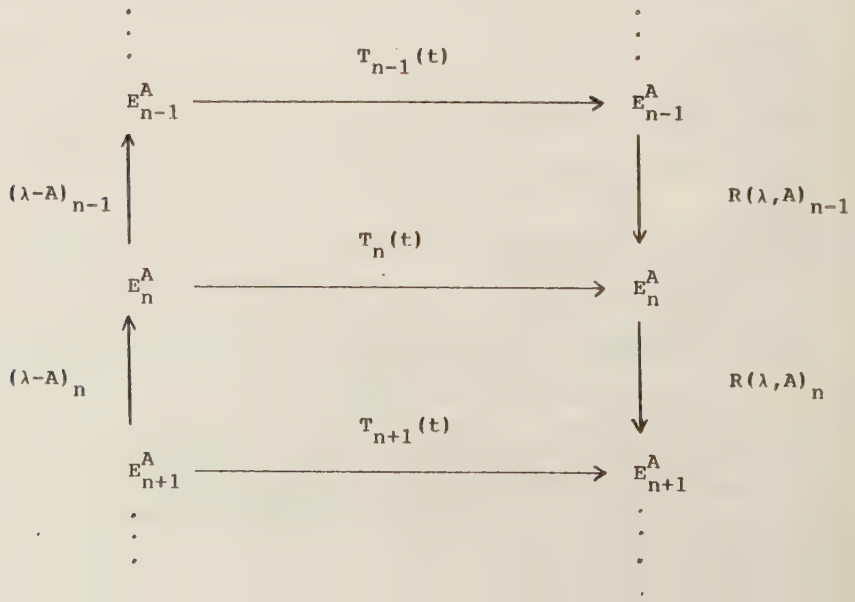
Beweis: (1) folgt aus den Propositionen 2.2 und 2.3 sowie der isometrischen Isomorphie der Räume E_n^A (Satz 1.12).

(2) wird wie Proposition 1.15 gezeigt.

(3) E_∞^A ist eine dichte Teilmenge von E nach Butzer/Berens, Proposition 1.1.6. Da die Halbgruppe $(T(t))$ wegen Proposition 2.2 den Raum E_∞^A invariant läßt, ist E_∞^A ein Gen von $A_0 = A$ und damit auch ein Gen von A_n für $n<0$, da E_∞^A dann auch dicht in E_n^A liegt.
Da E_∞^A ein Gen von A ist, liegt E_∞^A per Definition dicht in E_1^A, weshalb E_∞^A auch für A_1 ein Gen ist, da $(T_1(t))$ E_∞^A invariant läßt, woraus induktiv die Behauptung folgt.

(4) folgt, da $(T_n(t))$ auf einer in E_n^A dichten Teilmenge mit den Isomorphismen $((\lambda-A)_{n-1})^n: E_n^A \to E$ $(n>0)$ bzw. $(R(\lambda,A)_n)^{-n}: E_n^A \to E$ $(n<0)$ kommutiert. □

Damit hat der zu A gehörende Sobolev-Turm eine Struktur, welche in folgendem Diagramm dargestellt wird:



Während die Resolvente eines Generators den Raum E immer in den Raum E_1^A abbildet, ist dies für die Halbgruppen im allgemeinen nicht der Fall, wie das Beispiel der Translationshalbgruppen auf $L^p(\mathbb{R})$ $(1\leq p<\infty)$ oder auf $C_0(\mathbb{R})$ zeigt. Die nächste Proposition behandelt einen Sonderfall.

Proposition 2.5: $(T(t))$ ist genau dann eine für alle $t>0$ differenzierbare Halbgruppe, wenn für alle $n\in\mathbb{Z}$ und alle $t>0$ gilt:

$$(A_n)^k T_n(t)(E_n^A) \subset E_\infty^A \text{ für alle } k\in\mathbb{N}.$$

Beweis: (1) Falls $(T(t))$ differenzierbar ist für alle $t>0$, dann ist $(T(t))$ unendlich oft differenzierbar für alle $t>0$ und es folgt für alle $k\in\mathbb{N}$

$$A^k T(t)(E) \subset E \text{ für alle } t>0,$$

d.h. $T(t)(E) \subset E_\infty^A$. Aus Proposition 2.2 ergibt sich, daß A den Raum E_∞^A invariant läßt, woraus $A^k T(t)(E) \subset E_\infty^A$ folgt. Wegen Satz 2.4(4) gilt für $(T_n(t))$ dasselbe, womit eine Richtung der Äquivalenz gezeigt wurde.

(2) Es gelte $(A_n)^k T_n(t)(E_n^A) \subset E_\infty^A$ für alle $k\in\mathbb{N}$, alle $t>0$ und alle $n\in\mathbb{Z}$. Dann ist insbesondere $AT(t) \subset E$ für alle $t>0$ und damit auch $A_{-1}T(t) = AT(t)$ für alle $t>0$. Da $A_{-1}T(t)$ ein Element aus $L(E,E_{-1}^A)$ ist, ist $AT(t)$ ein abgeschlossener Operator in E, womit für alle $t>0$ gilt:

$$AT(t) = \frac{d}{dt}(T(t)) \in L(E),$$

d.h. $(T(t))$ ist für alle $t>0$ differenzierbar. □

Bemerkung 2.6: Bezeichnet man mit A_∞ bzw. $(\lambda-A)_\infty$ die Einschränkung von A bzw. $\lambda-A$ auf den Raum E_∞^A, dann gilt:

(1) Für alle $\lambda\in\sigma(A)$ ist $(\lambda-A)_\infty$ bijektiv auf E_∞^A.

(2) Ist $(\lambda-A)_\infty$ surjektiv auf E_∞^A, dann liegt λ nicht im Residualspektrum von A.

Beweis: Wegen Proposition 1.15 ist $\sigma(A) = \sigma(A_n)$. Daher lassen für $\lambda\in\rho(A)$ sowohl $\lambda-A$ als auch $R(\lambda,A)$ den Raum E_∞^A invariant. Somit gilt für alle $x\in E_\infty^A$

$$x = (\lambda-A)R(\lambda,A)x = R(\lambda,A)(\lambda-A)x,$$

woraus (1) folgt. (2) ist klar, da E_∞^A dicht in E liegt. □

Nach dem Theorem von Hille-Yosida werden Generatoren durch das Verhalten ihrer Resolvente auf einer reellen Halbgeraden charakterisiert, d.h. A ist genau dann Generator einer starkstetigen Halbgruppe, wenn es ein $\omega\in\mathbb{R}$ und ein $M\geq 1$ gibt, so daß für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\lambda\in\rho(A)$ mit $Re\lambda>\omega$ gilt:

$$\|R(\lambda,A)^n\| \leq M(Re\lambda-\omega)^{-n}.$$

Im folgenden wird für $n\in\mathbb{N}$ der Operator $R(\lambda,A)^n$ nicht als stetiger Operator auf E, sondern als Element aus $L(E,E_n^A)$ betrachtet.

Lemma 2.7: Sei $n\in\mathbb{N}$ und der zu A gehörige Sobolev-Turm mittels $\lambda\in\rho(A)$ definiert mit $\lambda>\omega$ und $\lambda>0$. Dann gilt für μ mit $Re\mu>\omega$

$$\|R(\mu,A)^n\|_{0,n} \leq 1 + M\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}|\lambda-\mu|^k(Re\mu-\omega)^{-k}.$$

Für reelle $\mu \geq \frac{1}{2}(\lambda-\omega)$ gilt insbesondere

$$\|R(\mu,A)^n\|_{0,n} \leq 1 + M(2^n-1).$$

Beweis: $\|R(\mu,A)^n\|_{0,n} = \|(\lambda-A)^n R(\mu,A)^n\| = \|((\lambda-A)R(\mu,A))^n\|$

$= \|(1+(\lambda-\mu)R(\mu,A))^n\| = \|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\lambda-\mu)^k R(\mu,A)^k\|$

$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}|\lambda-\mu|^k\|R(\mu,A)\|^k$

$\leq 1 + M\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}|\lambda-\mu|^k(Re\mu-\omega)^{-k}$.

Falls μ reell ist mit $\mu \geq \frac{1}{2}(\lambda-\omega)$, dann ist $|\lambda-\mu| \leq (\mu-\omega)$.

Daher gilt die Abschätzung

$$|\lambda-\mu|^k(Re\mu-\omega)^{-k} \leq (\mu-\omega)^k(\mu-\omega)^{-k} = 1 \quad \text{für } 1\leq k\leq n,$$

weshalb für alle $n\in\mathbb{N}$ folgt:

$\|R(\mu,A)^n\|_{0,n} \leq 1 + M\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}|\lambda-\mu|^k(Re\mu-\omega)^{-k}$

$\leq 1 + M\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} \leq 1 + M(2^n-1)$. □

Daraus ist ersichtlich, daß die Norm $\|R(\mu,A)^n\|_{0,n}$ für reelle μ beschränkt bleibt, wenn μ gegen $+\infty$ geht. Für komplexe μ mit $Re\mu>\omega$ bleibt $\|R(\mu,A)^n\|_{0,n}$ für $|\mu|$ gegen $+\infty$ nach obiger Abschätzung i.a. nicht beschränkt, was leicht einzusehen ist, wenn der Realteil von μ festgehalten wird und der Imaginärteil gegen $+\infty$ geht. Bleibt aber μ in einem Winkelbereich S_α mit

$$S_\alpha := \{\mu\in\mathbb{C} \mid Re\mu>0 \text{ und } |\tfrac{Im\mu}{Re\mu}|<\alpha,\ \alpha>0\},$$

dann gilt das folgende Lemma.

Lemma 2.8: Ist der zu A gehörende Sobolev-Turm definiert mittels $\lambda\in\rho(A)$, $\omega<\lambda\in\mathbb{R}_+$, dann gibt es eine von n und λ abhängige Konstante $c(n,\lambda)$, so daß für alle $\mu\in S_\alpha$ mit $Re\mu\geq\lambda>0$ und alle $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$\|R(\mu,A)^n\|_{0,n} \leq c(n,\lambda).$$

Beweis: Aufgrund der Voraussetzung an μ kann der Ausdruck $|\lambda-\mu|/(Re\mu-\omega)$ abgeschätzt werden durch

$$|\lambda-\mu|/(\mathrm{Re}\mu-\omega) = |\lambda-(\mathrm{Re}\mu+\mathrm{Im}\mu)|/(\mathrm{Re}\mu-\omega)$$
$$\leq |\mathrm{Re}\mu+\mathrm{Im}\mu|/(\mathrm{Re}\mu-\omega), \quad \text{da } \mathrm{Re}\mu\geq\lambda>0 \text{ ist},$$
$$\leq (1+\alpha)\mathrm{Re}\mu/(\mathrm{Re}\mu-\omega) \quad \text{wegen } |\mathrm{Im}\mu| \leq \alpha\mathrm{Re}\mu,$$
$$\leq (1+\alpha)(1+\omega/(\lambda-\omega)) \quad \text{wegen } \mathrm{Re}\mu \geq \lambda.$$

Damit gilt nach Lemma 2.7 für alle $\mu\in S_\alpha$ mit $\mathrm{Re}\mu\geq\lambda$

$$\|R(\mu,A)^n\|_{0,n} \leq 1 + M\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(1+\alpha)^k\left(1+\frac{\omega}{\lambda-\omega}\right)^k =: c(n,\lambda)\in\mathbb{R}_+,$$

womit das Lemma bewiesen ist. □

Wenn aber A Generator einer beschränkten holomorphen Halbgruppe ist, dann gilt für $\mathrm{Re}\lambda>0$ (siehe Davies, Thm. 2.33)

$$\|R(\lambda,A)\| \leq M(|\lambda|)^{-1} \text{ für ein } M\in\mathbb{R}_+.$$

Daraus ergibt sich folgende Verschärfung von Lemma 2.8.

Lemma 2.9: Sei A der Generator einer beschränkten holomorphen Halbgruppe, wobei der zu A gehörende Sobolev-Turm mit Hilfe von $\lambda>0$ ($\omega<\lambda$) definiert ist. Dann gibt es eine von n abhängige Konstante c(n), so daß für alle μ mit $\mathrm{Re}\mu\geq\lambda$ und alle $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$\|R(\mu,A)^n\|_{0,n} \leq c(n).$$

Beweis: Für $\mathrm{Re}\mu\geq\lambda$ ist $\frac{|\lambda-\mu|}{|\mu|} \leq 1$. Da $\|R(\mu,A)\| \leq \frac{M}{|\mu|}$ ist, gilt für dieses μ nach dem Beweis von Lemma 2.7

$$\|R(\mu,A)^n\|_{0,n} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}|\lambda-\mu|^k\|R(\mu,A)\|^k$$
$$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}|\lambda-\mu|^k\left(\frac{M}{|\mu|}\right)^k$$
$$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}M^k =: c(n),$$

was den Beweis von Lemma 2.9 beendet. □

Nun kann die Norm von $R(\mu,A)^n$, wenn dieser Operator als Element aus $\mathcal{L}(E,E_n^A)$ betrachtet wird, auf folgende Weise zur Charakterisierung eines Generators verwendet werden.

Satz 2.10: Sei $(A,D(A))$ abgeschlossen, dicht definiert und $\rho(A)$ enthalte eine rechte reelle Halbgerade. Weiterhin seien die Isomorphismen zwischen den Räumen E_n^A mittels eines $\lambda \in \mathbb{R}_+$ definiert. Dann sind Äquivalent:

(a) A ist ein Generator.

(b) $\lambda \in \mathbb{R}_+ \cap \rho(A)$ kann so gewählt werden, daß für ein $M \in \mathbb{R}_+$, alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\mu \geq \lambda$ gilt:

$$\|(R(\mu,A)-R(\lambda,A))^n\|_{0,n} \leq M.$$

Beweis: (1) Sei A Generator. Dann gibt es ein $M \in \mathbb{R}_+$ und ein $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\|(\mu-\omega)^n R(\mu,A)^n\| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mu > \omega$.

Daraus ergibt sich, wenn $\|\cdot\|_n^A$ mittels $\lambda > \omega$ definiert wird:

$\|(\mu-\lambda)^n R(\mu,A)^n\| \leq M$ für alle $\mu \geq \lambda$, $n \in \mathbb{N}$.

Nun gilt

$$\begin{aligned}(\mu-\lambda)R(\mu,A) &= (\mu-\lambda)R(\mu,A) - 1 + 1\\ &= \mu R(\mu,A) - 1 - \lambda R(\mu,A) + 1\\ &= AR(\mu,A) - \lambda R(\mu,A) + 1\\ &= -(\lambda-A)(R(\mu,A) - R(\lambda,A)),\end{aligned}$$

woraus für $\mu \geq \lambda$ folgt:

$$\|(\lambda-A)^n(R(\mu,A)-R(\lambda,A))^n\| = \|(R(\mu,A)-R(\lambda,A))^n\|_{0,n} \leq M.$$

(2) Es gelte (b), d.h. es gilt für $\mu \geq \lambda$

$$\|(R(\mu,A)-R(\lambda,A))^n\|_{0,n} \leq M \ , \ M \in \mathbb{R}_+.$$

Wie in Beweisteil (1) ergibt sich damit

$$\|(\mu-\lambda)^n R(\mu,A)^n\| \leq M$$

für alle $\mu \geq \lambda$ und $\lambda \in \mathbb{R}_+$, was nach dem Theorem von Hille-Yosida gerade heißt, daß A Generator ist. □

Satz 2.10 kann dahin interpretiert werden, daß sich diejenigen Isomorphismen zwischen E und E_n^A, welche mittels der Werte auf einer reellen Halbgeraden definiert werden, im Sinne von Satz 2.10 nur "wenig" voneinander unterscheiden.

3. Favard-Klassen für Generatoren

Bisher wurden für den Operator A mit Hilfe seines Definitionsbereichs D(A) und seiner Resolvente $R(\lambda,A)$ $(\lambda\in\rho(A)\neq\emptyset)$ mit den Banachräumen $(E_n^A)_{n\in\mathbb{Z}}$ und den Halbgruppen $(T_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Anzahl von Objekten definiert, mittels derer der Operator A bzw. die Halbgruppe (T(t)) in einem größeren Zusammenhang betrachtet werden können.

Das in den Kapiteln 1 und 2 eingeführte Verfahren wird nun für die zu A und (T(t)) gehörenden Favard-Klassen durchgeführt, wobei der Begriff der Favard-Klasse aus der Approximationstheorie stammt (siehe Butzer/Berens, Chapter 2.1, sowie J. Favard). Dazu folgende Definition.

Definition 3.1: Sei $n\in\mathbb{Z}$. Für alle $x\in E_n^A$, für welche der untenstehende limes superior für $t \to 0$ existiert, sei folgende Norm definiert:

$$\begin{aligned}\|x\|_{F_n} &:= \|x\|_n^A + \limsup_{t\downarrow 0}\left\|\tfrac{1}{t}(T_n(t)x-x)\right\|_n^A \\ &= \|x\|_n^A + \limsup_{t\downarrow 0}\left\|\tfrac{1}{t}A_n\int_0^t T_n(s)x\,ds\right\|_n^A.\end{aligned}$$

Dann wird die zum Sobolev-Turm $(E_n^A)_{n\in\mathbb{Z}}$ gehörende n-te Favard-Klasse als folgender normierter Raum definiert:

$$F_n := (\{x\in E_n^A \mid \|x\|_{F_n} < \infty\},\ \|\cdot\|_{F_n}).$$

$F := F_0$ ist die in Butzer/Berens, Definition 2.1.1 eingeführte gewöhnliche Favard-Klasse.

Die Räume F_n haben ihre Bedeutung sowohl für die Störungstheorie für Generatoren, welche in den Kapiteln 4, 5 und 6 be-

handelt wird, als auch für die Konstruktion "dualer Halbgruppen". Wie das Korollar 3.8 zeigt, sind die Favard-Klassen in diesem Zusammenhang vor allem für nicht-reflexive Räume interessant. Zunächst gilt folgendes zu den Lemmata 1.2 und 1.6 analoges Lemma:

Lemma 3.2: Für die für alle $x \in F_n$ definierte Norm $\|\cdot\|_n^F$ mit

$$\|x\|_n^F := \limsup_{t \downarrow 0} \|\tfrac{1}{t}\int_0^t T_n(s)x\,ds\|_{n+1}^A$$

gilt: (a) $\|x\|_n^F = \|x\|_{n+1}^A$ für alle $x \in E_{n+1}^A$.

(b) Die Norm $\|\cdot\|_n^F$ ist äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_{F_n}$.

Beweis: (a) Für $x \in E_{n+1}^A$ ist $T_n(x) = T_{n+1}(x)$. Damit ist die Funktion $t \to \int_0^t T_n(s)x\,ds$ stetig von $[0,\infty)$ nach E_{n+1}^A und es gilt $x = \lim_{t \downarrow 0}(\frac{1}{t}\int_0^t T_n(s)x\,ds)$.

Damit folgt

$$\begin{aligned}\|x\|_{n+1}^A &= \|\lim_{t \downarrow 0}(\tfrac{1}{t}\int_0^t T_n(s)x\,ds)\|_{n+1}^A \\ &= \lim_{t \downarrow 0}\|\tfrac{1}{t}\int_0^t T_n(s)x\,ds\|_{n+1}^A \\ &= \limsup_{t \downarrow 0}\|\tfrac{1}{t}\int_0^t T_n(s)x\,ds\|_{n+1}^A = \|x\|_n^F .\end{aligned}$$

(b) Sei die Norm $\|\cdot\|_n^A$ mittels $\lambda \in \rho(A)$ definiert. Dann folgt

$$\begin{aligned}\|x\|_n^F &= \limsup_{t \downarrow 0}\|\tfrac{1}{t}\int_0^t T_n(s)x\,ds\|_{n+1}^A \\ &= \limsup_{t \downarrow 0}\|\tfrac{1}{t}(\lambda - A_n)\int_0^t T_n(s)x\,ds\|_n^A \\ &\le \limsup_{t \downarrow 0}\|\lambda\tfrac{1}{t}\int_0^t T_n(s)x\,ds\|_n^A \\ &\quad + \limsup_{t \downarrow 0}\|\tfrac{1}{t}A_n\int_0^t T_n(s)x\,ds\|_n^A \\ &\le |\lambda|\,\|x\|_n^A + \limsup_{t \downarrow 0}\|\tfrac{1}{t}A_n\int_0^t T_n(s)x\,ds\|_n^A, \\ &\qquad \text{denn } \tfrac{1}{t}\int_0^t T_n(s)x\,ds \to x \text{ für } t \to 0 \text{ in } E_n^A, \\ &\le (|\lambda| + 1)\|x\|_{F_n}.\end{aligned}$$

Damit ist die $\|\cdot\|^F_n$-Norm feiner als die $\|\cdot\|^F_n$-Norm. Der umgekehrte Schluß ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\|x\|^F_n &= \|x\|^A_n + \limsup_{t\downarrow 0}\|\tfrac{1}{t}(T_n(t)x-x)\|^A_n \\
&= \|(\lambda-A_n)R(\lambda,A_n)x\|^A_n + \limsup_{t\downarrow 0}\|\tfrac{1}{t}A_n\textstyle\int_0^t T_n(s)x\,ds\|^A_n \\
&= \|R(\lambda,A)_n x\|^A_{n+1} + \limsup_{t\downarrow 0}\|\tfrac{1}{t}(A_n-\lambda+\lambda)\textstyle\int_0^t T_n(s)x\,ds\|^A_n \\
&\le \|R(\lambda,A)_n x\|^F_n + \limsup_{t\downarrow 0}\|\tfrac{1}{t}\textstyle\int_0^t T_n(s)x\,ds\|^A_{n+1} \\
&\qquad + \limsup_{t\downarrow 0}\|\tfrac{1}{t}\lambda R(\lambda,A)_n\textstyle\int_0^t T_n(s)x\,ds\|^A_{n+1},
\end{aligned}$$

wobei beim ersten Term Teil (a) benutzt wurde,

$$\begin{aligned}
&\le \limsup_{t\downarrow 0}\|R(\lambda,A)_{n+1}\|_{n+1,n+1}\cdot\|\tfrac{1}{t}\textstyle\int_0^t T_n(s)x\,ds\|^A_{n+1} \\
&\quad + \limsup_{t\downarrow 0}\|\tfrac{1}{t}\textstyle\int_0^t T_n(s)x\,ds\|^A_{n+1} \\
&\quad + \limsup_{t\downarrow 0}\|\lambda R(\lambda,A)_{n+1}\|_{n+1,n+1}\cdot\|\tfrac{1}{t}\textstyle\int_0^t T_n(s)x\,ds\|^A_{n+1} \\
&\le (((|\lambda|+1)\|R(\lambda,A)_{n+1}\|_{n+1,n+1}) + 1)\cdot\|x\|^F_n. \qquad \square
\end{aligned}$$

Nun ergibt sich für die Favard-Klassen F_n wie in Satz 1.12 ein Turm, welcher folgende Eigenschaften hat.

Satz 3.3: Für alle $n\in\mathbb{Z}$ gilt:

(1) Die Räume F_n sind vollständig.

(2) Alle F_n sind isometrisch isomorph und der Isomorphismus von F_n nach F ist durch $((\lambda-A)_n)^n$ für $n\ge 1$ bzw. durch $(R(\lambda,A)_n)^{-n}$ für $n\le -1$ gegeben. Dabei ist $\lambda\in\rho(A)$ dasselbe λ, welches zur Definition der Räume E^A_n verwendet wurde.

(3) $(T_n(t))$ ist eine (i.a. nicht stark-stetige) Halbgruppe auf F_n, und für alle $x\in F_n$ gilt $\|T_n(t)x\|^F_n \le Me^{\omega t}\|x\|^F_n$.
Dabei sind M,ω die für die auf E^A_{n+1} stark-stetige Halbgruppe $(T_{n+1}(t))$ gültigen Konstanten.

Beweis: (1) Um die Vollständigkeit von F_n zu zeigen, sei (x_k) eine Cauchy-Folge in F_n. Dann konvergiert diese Folge in E_n^A gegen ein $x \in E_n^A$, und für alle $\varepsilon>0$ gibt es ein n_0, so daß für alle $k,m \in \mathbb{N}$ mit $k,m \geq n_0$ gilt:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{t}\|T_n(t)(x-x_k)-(x-x_k)\|_n^A \\ \leq\ &\tfrac{1}{t}\|T_n(t)(x-x_m)-(x-x_m)\|_n^A + \tfrac{1}{t}\|T_n(t)(x_k-x_m)-(x_k-x_m)\|_n^A \\ \leq\ &\tfrac{1}{t}(Me^{\omega t}+1)\|x-x_m\|_n^A + \varepsilon \text{ für alle } 0<t\leq t_0. \end{aligned}$$

Dabei wurde 2.4(1) benutzt. Da m beliebig groß gewählt werden kann, folgt somit

$$\operatorname{limsup}_{t\downarrow 0}\left(\tfrac{1}{t}\|T_n(t)(x-x_k)-(x-x_k)\|_n^A\right) \leq 2\varepsilon,$$

was die Vollständigkeit von F_n zur Folge hat.

(2) Aus Lemma 3.2 und Satz 2.4 ergibt sich die Isomorphie der F_n mitsamt dem zugehörigen Isomorphismus, denn es gilt

$$\left(\tfrac{1}{t}(\lambda-A)_n\right)^{n+1}\int_0^t T_n(s)x\,ds = (\lambda-A)\tfrac{1}{t}\int_0^t T(s)\left((\lambda-A)_n\right)^n x\,ds$$

für alle $x \in F_n$ und $n \geq 1$. Entsprechendes folgt für $n \leq -1$.

(3) $(T_n(t))$ hat auf F_n natürlich die Halbgruppeneigenschaft, und es gilt für alle $x \in F_n$ und alle $t>0$

$$\begin{aligned} \|T_n(t)x\|_n^F &= \operatorname{limsup}_{h\downarrow 0}\|\tfrac{1}{h}\int_0^h T_n(s)T_n(t)x\,ds\|_{n+1}^A \\ &= \operatorname{limsup}_{h\downarrow 0}\|T_{n+1}(t)\tfrac{1}{h}\int_0^h T_n(s)x\,ds\|_{n+1}^A \\ &\leq \operatorname{limsup}_{h\downarrow 0}\|T_{n+1}(t)\|_{n+1,n+1}\cdot\|\tfrac{1}{h}\int_0^h T_n(s)x\,ds\|_{n+1}^A \\ &\leq Me^{\omega t}\|x\|_n^F. \end{aligned}$$

□

Das folgende Lemma charakterisiert die n-te Favard-Klasse F_n alleine durch den Generator A_n.

Lemma 3.4: Seien $n \in \mathbb{Z}$ und $x \in E_n^A$. Dann ist x genau dann aus F_n, wenn es eine in E_{n+1}^A beschränkte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, so daß $\|x_k - x\|_n^A \to 0$ geht für $k \to \infty$.

Beweis: (1) Ist $x\in F_n$, dann setze $x_k := k\int_0^{1/k} T_n(s)x\,ds$ für alle $k\in\mathbb{N}$. Aufgrund der starken Stetigkeit von $(T_n(t))$ gilt $\|x_k - x\|_n^A \to 0$ für $k\to\infty$. Da $x\in F_n$ ist, gilt weiterhin $\|x\|_n^F = \limsup_{t\downarrow 0}\|\frac{1}{t}\int_0^t T_n(s)x\,ds\|_{n+1}^A \geq \limsup_{k\to\infty}\|x_k\|_{n+1}^A$, woraus folgt, daß $\sup_{k\in\mathbb{N}}\|x_k\|_{n+1}^A < \infty$ ist.

(2) Sei $x\in E_n^A$ und sei die $\|\cdot\|_n^A$-Norm mittels $\lambda\in\rho(A)$ definiert. Weiterhin gebe es eine Folge $(x_k)\subset E_{n+1}^A$, so daß gilt: $\|x_k - x\|_n^A \to 0$ für $k\to\infty$ und $\sup_{k\in\mathbb{N}}\|x_k\|_{n+1}^A = c < \infty$. Dann folgt für $t>0$ und $k\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|\tfrac{1}{t}\textstyle\int_0^t T_n(s)x\,ds\|_{n+1}^A &\leq \|x_k\|_{n+1}^A + \|\tfrac{1}{t}\textstyle\int_0^t T_n(s)x\,ds - x_k\|_{n+1}^A \\
&\leq c + \|\tfrac{1}{t}\textstyle\int_0^t T_n(s)x_k\,ds - x_k\|_{n+1}^A + \|\tfrac{1}{t}\textstyle\int_0^t T_n(s)(x-x_k)\,ds\|_{n+1}^A \\
&\leq c + (Me^{\omega t}+1)\|x_k\|_{n+1}^A + \|\tfrac{1}{t}(\lambda-A)_n\textstyle\int_0^t T_n(s)(x-x_k)\,ds\|_n^A \\
&\leq (Me^{\omega t}+2)c + |\lambda|Me^{\omega t}\|x_k - x\|_n^A \\
&\qquad + \|\tfrac{1}{t}(T_n(t)(x-x_k) - (x-x_k))\|_n^A \\
&\leq (Me^{\omega t}+2)c + (|\lambda|Me^{\omega t} + \tfrac{1}{t}(Me^{\omega t}+1))\|x-x_k\|_n^A.
\end{aligned}$$

Da $x_k \to x$ geht in E_n^A für $k\to\infty$, gilt für alle $t>0$ $\|\frac{1}{t}\int_0^t T_n(s)x\,ds\|_{n+1}^A \leq (Me^{\omega t}+3)c$, weshalb $x\in F_n$ ist. □

Bemerkung 3.5: Die in Lemma 3.4 gegebene Charakterisierung der Favard-Klassen ermöglicht es einerseits, auch für Operatoren, die keine Generatoren sind, die zu $(F_n^A)_{n\in\mathbb{Z}}$ gehörenden Favard-Klassen auf eine mit Definition 3.1 konsistente Weise zu definieren. Andererseits lassen sich mit Lemma 3.4 die Favard-Klassen bestimmen, ohne die explizite Gestalt der Halbgruppen $(T_n(t))$ $(n\in\mathbb{Z})$ zu benötigen.

Ein weiterer wichtiger Zusammenhang zwischen den Sobolev-Räumen und den Favard-Klassen ergibt sich, wenn wir die

"dualen Halbgruppen" betrachten. Falls E nicht reflexiv ist, dann ist die auf E' definierte Halbgruppe (T'(t)) i.a. nicht auf ganz E' stark-stetig, sondern nur auf einem abgeschlossenen Unterraum, welcher mit E* bezeichnet werde (siehe Pazy, Chapter 1, Theorem 10.4). Die Einschränkung von (T'(t)) auf diesen Raum sei (T*(t)) und der Generator dieser Halbgruppe werde mit A* bezeichnet. Mittels E* und A* kann gemäß den Definitionen 1.5 und 1.9 sowie den Propositionen 2.2 und 2.3 ein Sobolev-Turm konstruiert werden, wobei die auf $(E^*)_n^{A^*}$ definierten Halbgruppen $(T_n^*(t))$ natürlich wieder alle in 2.4 bewiesenen Eigenschaften haben. Nun gilt folgender Satz, durch den ersichtlich wird, daß in E' die Rollen der Favard-Klassen und der Definitionsbereiche von $(A')_n$ bezüglich der Situation auf E vertauscht werden.

Satz 3.6: Für den zum Generator A adjungierten Operator A' gibt es einen in E' abgeschlossenen Unterraum E*, auf dem die Halbgruppe (T'(t)) in der $\|\cdot\|_{E'}$-Norm stark-stetig ist mit Generator (A*,D(A*)), so daß für die Räume $((E')_n^{A'})_{n\in\mathbb{Z}}$ und die Räume $((E^*)_n^{A^*})_{n\in\mathbb{Z}}$ folgendes gilt:

(1) Für die Räume $(E^*)_n^{A^*}$ gelten die entsprechenden Aussagen von Satz 2.4.

(2) $(E')_m^{A'}$ ist die zu $((E^*)_n^{A^*})_{n\in\mathbb{Z}}$ gehörende (m-1)-te Favard-Klasse im Sinne von Definition 3.1. Diese werde mit F_{m-1}^* bezeichnet.

Beweis: (1) ist klar wegen 2.4.

(2) Sei $x'\in(E')_1^{A'}$ und sei $\lambda\in\rho(A')$ dasselbe λ, welches zur Definition der $\|\cdot\|_1^{A'}$-Norm benutzt wurde.

Dann gilt für alle $t>0$

$$\left\|\frac{1}{t}\int_0^t T'(s)x'ds\right\|_1^{\Lambda'} = \left\|\frac{1}{t}\int_0^t T'(s)(\lambda-\Lambda')x'ds\right\|_{E'} \leq Me^{\omega t}\|x'\|_1^{\Lambda'}.$$

Damit folgt

$$\|x'\|_0^{F^*} = \limsup_{t\downarrow 0}\left\|\frac{1}{t}\int_0^t T'(s)x'ds\right\|_1^{\Lambda'} \leq M\|x'\|_1^{\Lambda'},$$

was gerade bedeutet, daß sich $(E')_1^{\Lambda'}$ stetig in $F^* = F_0^*$ einbetten läßt.

Um die andere Richtung zu zeigen, sei $x'\in F_0^*$. Nach Lemma 3.4 gibt es eine Folge $(x_k')_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A^*)$, so daß gilt:

(i) $\|x_k'-x'\|_{E^*} = \|x_k'-x'\|_{E'} \to 0$ für $k\to\infty$.

(ii) $\sup_{k\in\mathbb{N}}\|x_k'\|_1^{\Lambda^*} = \sup_{k\in\mathbb{N}}\|(\lambda-A^*)x_k'\|_{E'} = c < \infty$.

Per Definition ist $D(A^*) \subset D(A')$. Da nach Satz 1.19 $D(A') = (E_{-1}^{\Lambda})'$ ist, gibt es wegen (ii) eine Teilfolge $(y_k')_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_k')_{k\in\mathbb{N}}$, die in der $\sigma((E_{-1}^{\Lambda})',E_{-1}^{\Lambda})$-Topologie gegen ein y' aus $D(A')$ konvergiert, d.h. es gilt für alle $x\in E_{-1}^{\Lambda}$

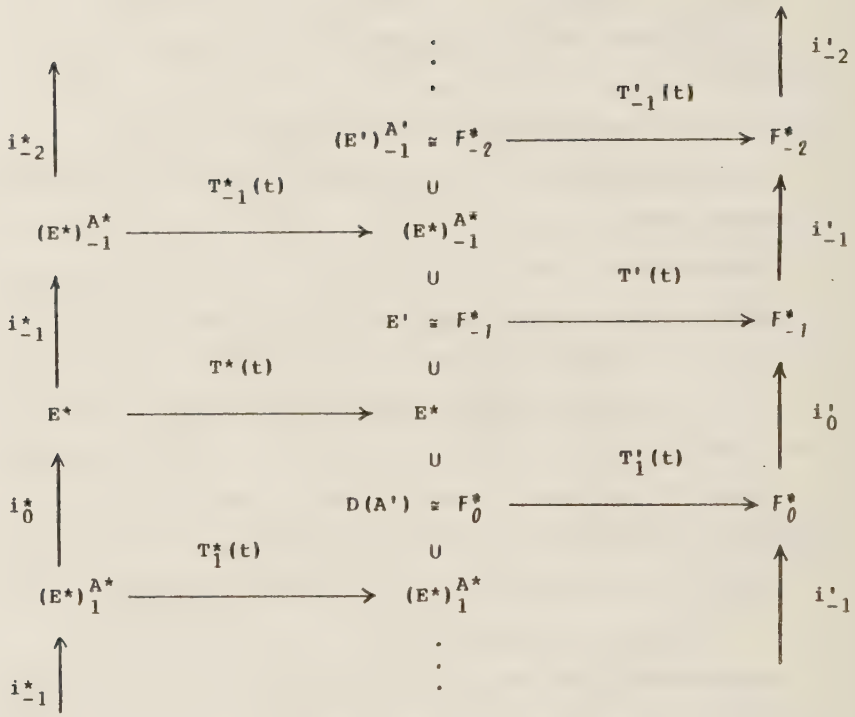
$$|y_k'(x) - y'(x)| \to 0 \text{ für } k\to\infty.$$

Andererseits gilt wegen (i) für alle $x\in E$

$$|y_k'(x) - x'(x)| \to 0 \text{ für } k\to\infty.$$

Damit ist $x'(x) = y'(x)$ für alle $x\in E$, woraus $x'= y'$ folgt, da E dicht in E_{-1}^{Λ} liegt. Somit ist $x'\in D(A')$ und es gilt $F_0^* \subset D(A')$, woraus sich die Behauptung für $m=1$ ergibt, da $F^* = F_0^*$ nach Satz 3.3(1) vollständig ist. Mit Satz 3.3(2) kann auf die Gültigkeit der Behauptung für alle $m\in\mathbb{Z}$ geschlossen werden. □

Die beiden Türme werden durch folgendes Diagramm veranschaulicht, wobei i_n^* bzw. i_n' die Isomorphismen von $(E^*)_{n+1}^{\Lambda^*}$ nach $(E^*)_n^{\Lambda^*}$ bzw. von $(E')_{n+1}^{\Lambda'}$ nach $(E')_n^{\Lambda'}$ sind. Mit "U" werden die stetigen Einbettungen bezeichnet.



Fast unmittelbar aus diesem Diagramm ergeben sich die beiden folgenden Korollare.

Korollar 3.7: Ist A Generator und die Adjungierte A' dicht definiert, dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$(E')^{A'}_n \cong (E^*)^{A^*}_n \cong F^*_{n-1}.$$

Beweis: Wenn A' dicht in E' definiert ist, dann ist (T'(t)) auf E' stark-stetig, weshalb $E^* \cong E'$ und $A^* = A'$ sind. Damit gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$ aufgrund von Satz 3.3 und Satz 3.6

$$(E^*)^{A^*}_n \cong (E')^{A'}_n \text{ und } (E')^{A'}_n \cong F^*_{n-1}.$$ □

Das nächste Korollar ist für den Fall n=0 bekannt (siehe Butzer/Berens, Corollary 2.1.3).

Korollar 3.8: Ist A Generator auf dem reflexiven Banachraum E, dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$F_n \cong E^A_{n+1}.$$

Beweis: Aufgrund der Reflexivität von E ist A' in E' dicht definiert und Generator der auf E' stark-stetigen Halbgruppe (T'(t)). Da A'' = A ist, liefert das Korollar 3.7, angewandt auf A', die Behauptung. □

4. Störung von Sobolev-Türmen

Sei im folgenden (A,D(A)) Generator einer stark-stetigen Halbgruppe (T(t)) auf E und (B,D(B)) ein dicht definierter Operator auf E. Dann stellt sich zunächst die Frage, ob die zum Operator (A+B) gehörenden Sobolev-Räume $(E_n^{A+B})_{n\in\mathbb{Z}}$ überhaupt existieren, d.h. ob $\rho(A+B)\neq\emptyset$ ist. Dazu muß zuerst D(A+B) festgelegt werden.

Im folgenden gelte, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes vorausgesetzt wird, $D(A) \subset D(B)$ und $D(A+B) := D(A)$. Nun wird zunächst untersucht, für welche $\lambda\in\rho(A)$ der Operator $\lambda-A-B$ invertierbar ist. Dabei wird die Voraussetzung $\lambda\in\rho(A)$ deshalb gemacht, weil im Hinblick auf die Störungstheorie für Generatoren $\rho(A+B)$ ebenso wie $\rho(A)$ eine rechte Halbebene enthalten muß, damit A+B wieder ein Generator ist.

Wenn man sich mit einem der Halbgruppentheorie eng verbundenen Problem, nämlich den abstrakten Cauchy-Problemen beschäftigt (siehe Fattorini), dann ist die Existenz und das Verhalten von $R(\lambda,A+B)$ für die Art der Lösbarkeit des abstrakten Cauchy-Problems von entscheidender Bedeutung (Krein, Lyubic, Beals).

Eine erste Antwort auf die Frage nach der Existenz von $R(\lambda,A+B)$ gibt folgendes Lemma.

Lemma 4.1: Sei $\lambda\in\rho(A)$ und sei $B\in\mathcal{L}(E_1^A,E)$. Dann ist für die Existenz von $R(\lambda,A+B)$ als bijektiver stetiger Operator von E nach E_1^A jede der folgenden beiden Bedingungen hinreichend:

(1) $\|BR(\lambda,A)\|_{0,0} < 1$.

(2) $\|R(\lambda,A)B\|_{1,1} < 1$.

Es ist zu beachten, daß aufgrund der Voraussetzung $B \in L(E_1^A, E)$ immer gilt: $BR(\lambda,A) \in L(E)$ und $R(\lambda,A)B \in L(E_1^A)$.

Beweis: Es gilt die Identität

$$\lambda - A - B = (\lambda - A)(1 - R(\lambda,A)B) = (1 - BR(\lambda,A))(\lambda - A).$$

Damit ist wegen der ersten Gleichung genau dann $\lambda \in \rho(A+B)$, wenn der Operator $1-R(\lambda,A)B$ stetig invertierbar auf E_1^A ist, was wegen der zweiten Gleichung wiederum zur stetigen Invertierbarkeit des Operators $1-BR(\lambda,A)$ auf E äquivalent ist. Aus den Bedingungen (1) bzw. (2) folgt jeweils die Invertierbarkeit von $1-R(\lambda,A)B$ bzw. $1-BR(\lambda,A)$. □

Die Voraussetzung $B \in L(E_1^A, E)$ in Lemma 4.1 ist nicht hinreichend für die Existenz von $R(\lambda, A+B)$ als bijektiver stetiger Operator von E nach E_1^A, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 4.2: (a) Setze $B := -A$. Dann ist $\lambda - A - B = \lambda$ zwar invertierbar auf E, nicht aber von E nach E_1^A, falls $A \notin L(E)$ ist.

(b) Setze $B := -2A$. Wenn $-\lambda \in \sigma(A)$ ist, dann ist $\lambda - A - B = \lambda + A$ nicht invertierbar von E nach E_1^A.

Ist aber $B \in L(E)$, dann wurde schon von Phillips im Jahre 1953 gezeigt, daß $A+B$ mit $D(A+B) = D(A)$ Generator einer Halbgruppe auf E ist. Diese Aussage läßt sich mit Hilfe der in den Kapiteln 1 und 2 entwickelten Theorie der Sobolev-Räume verallgemeinern.

Theorem 4.3: Sei $B \in \mathcal{L}(E)$. Dann erzeugt A+B ebenfalls einen Sobolev-Turm $(E_n^{A+B})_{n\in\mathbb{Z}}$, und dieser Turm stimmt für die drei Stufen n=-1,0,1 mit dem Turm $(E_n^A)_{n\in\mathbb{Z}}$ überein.

Beweis: (1) Für $\lambda \in \rho(A)$ mit $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ gilt

$$\|BR(\lambda,A)\| \le \|B\| \cdot \|R(\lambda,A)\| \le \frac{\|B\| \cdot M}{\mathrm{Re}\lambda - \omega} \to 0 \quad \text{für } \mathrm{Re}\lambda \to \infty.$$

Nach Lemma 4.1(1) existiert $R(\lambda,A+B)$ in einer rechten Halbebene, so daß sich mit Hilfe jedes $\lambda \in \rho(A)$ mit $\mathrm{Re}\lambda - \omega > M \cdot \|B\|$ in der in Kapitel 1 dargestellten Weise der Sobolev-Turm $(E_n^{A+B})_{n\in\mathbb{Z}}$ konstruieren läßt. Trivialerweise stimmen die beiden Türme für n=0 überein.

(2) Es wird die Äquivalenz der Graphennormen auf $D(A) = E_1^A$ gezeigt. Dazu sei $x \in E_1^A$.

$$\begin{aligned}\|x\|_1^A &= \|x\| + \|Ax\| \le \|x\| + \|(A+B)x\| + \|Bx\| \\ &\le c(\|x\| + \|(A+B)x\|) = c\|x\|_1^{A+B} \\ &\le c(\|x\| + \|Ax\| + \|Bx\|) \le d\|x\|_1^A \quad \text{für } c,d \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

Nach Beweisteil (1) existiert ein $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(A+B)$. Für dieses λ sind die Normen $\|\cdot\|_1^A$ und $\|\cdot\|_1^{A+B}$ äquivalent, denn nach Lemma 1.2 gilt $\|\cdot\|_1^A \simeq \|\cdot\|^A$ und $\|\cdot\|_1^{A+B} \simeq \|\cdot\|^{A+B}$. Daher ist $E_1^A \simeq E_1^{A+B}$.

(3) Um die Äquivalenz von $\|\cdot\|_{-1}^A$ und $\|\cdot\|_{-1}^{A+B}$ zu zeigen, sei $x \in E$ und $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(A+B)$, womit folgt:

$$\begin{aligned}\|x\|_{-1}^A &= \|R(\lambda,A)x\| = \|R(\lambda,A)(\lambda-A-B)R(\lambda,A+B)x\| \\ &= \|R(\lambda,A)(\lambda-A)R(\lambda,A+B)x - R(\lambda,A)BR(\lambda,A+B)x\| \\ &\le \|R(\lambda,A+B)x\| + \|R(\lambda,A)\|\|B\|\|R(\lambda,A+B)x\| \\ &\le c'\|x\|_{-1}^{A+B} \quad \text{für ein } c' \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

Damit ist die $\|\cdot\|_{-1}^{A+B}$-Norm feiner als die $\|\cdot\|_{-1}^A$-Norm. Es gilt aber auch die umgekehrte Richtung.

$$\|x\|_{-1}^{A+B} = \|R(\lambda,A+B)x\| = \|R(\lambda,A+B)(\lambda-A)R(\lambda,A)x\|$$
$$= \|R(\lambda,A+B)(\lambda-A-B+B)R(\lambda,A)x\|$$
$$= \|(1+R(\lambda,A+B)B)R(\lambda,A)x\|$$
$$\leq (1+\|R(\lambda,A+B)\|\cdot\|B\|)\|x\|_{-1}^{A}.$$

Damit ist $E_{-1}^{A} = E_{-1}^{A+B}$. □

Korollar 4.4: Sei $B\in L(E_n^A)$ für ein $n\in\mathbb{Z}$. Dann erzeugt A_n+B mit Definitionsbereich E_{n+1}^A eine Halbgruppe $(S(t))$ auf E_n^A und der zu A_n+B gehörende Sobolev-Turm $(E_m^{A_n+B})_{m\in\mathbb{Z}}$ stimmt in drei Stufen mit dem von A erzeugten Sobolev-Turm überein, d.h. es gilt

$$E_0^{(A_n+B)} = E_n^A, \quad E_1^{(A_n+B)} = E_{n+1}^A \quad \text{und} \quad E_{-1}^{(A_n+B)} = E_{n-1}^A.$$

Beweis: Da nach Proposition 2.2 und 2.3 der Operator A_n der Generator der zu $(T(t))$ ähnlichen Halbgruppe $(T_n(t))$ ist, ist A_n+B nach dem oben erwähnten Resultat von Phillips ebenfalls Generator einer Halbgruppe auf E_n^A, weshalb A_n+B einen Sobolev-Turm mit Grundraum E_n^A erzeugt. Damit läßt sich der Beweis von Theorem 4.3 analog übernehmen. □

Das nächste Korollar ist die angekündigte Verallgemeinerung des vorher zitierten Störungssatzes von Phillips.

Korollar 4.5: Sei $B\in L(E_n^A)$ für ein $n\in\mathbb{Z}$. Dann folgt:

(1) $A_{n-1}+B$ mit Definitionsbereich E_n^A ist Generator einer Halbgruppe auf E_{n-1}^A.

(2) $(A_n+B)_1$ ist Generator einer Halbgruppe auf E_{n+1}^A, wobei $D((A_n+B)_1) = E_2^{(A_n+B)}$ der maximale Definitionsbereich von A_n+B in E_{n+1}^A ist.

Beweis: (1) Nach Satz 2.4 sind die auf $E_m^{A_n+B}$ definierten Halbgruppen $(S_m(t))$ für alle $m\in\mathbb{Z}$ isometrisch isomorph zu der von A_n+B auf E_n^A erzeugten Halbgruppe $(S(t))$ und der Generator von $(S_m(t))$ ist der Operator $(A_n+B)_m$. Insbesondere ist der Definitionsbereich von $(A_n+B)_{-1}$ gerade der Raum E_n^A, womit die Behauptung aus Korollar 4.4 folgt.

(2) ergibt sich genauso aus 4.4, da $(S_1(t))$ eine Halbgruppe auf $E_1^{(A_n+B)} = E_{n+1}^A$ ist, wobei i.a. $E_{n+2}^A \neq E_2^{(A_n+B)}$ ist, wie Beispiel 6.2 in Kapitel 6 zeigt. □

Für n=1 wurde 4.5(1) schon von Desch/Schappacher gezeigt. Beispiele für den Fall n=-1 diskutieren wir in Kapitel 6.

In Theorem 4.3 wurden hinreichende Bedingungen für die Existenz des Sobolev-Turms des gestörten Generators genannt und eine Aussage über den Grad der Übereinstimmung des "gestörten" mit dem "ungestörten" Turm gemacht.

Das folgende Lemma gibt eine notwendige Bedingung für die Übereinstimmung einzelner Stufen des "gestörten" mit dem "ungestörten" Turm an.

Lemma 4.6: Sei $(A,D(A))$ ein abgeschlossener, dicht definierter Operator auf E, und es sei $\lambda\in\rho(A)\neq\emptyset$, so daß die Räume $(E_n^A)_{n\in\mathbb{Z}}$ existieren. Sei $B\in L(E_1^A,E)$, so daß für A+B mit $D(A+B) = D(A)$ gilt: $\lambda\in\rho(A+B)$, d.h. $(E_k^{A+B})_{k\in\mathbb{Z}}$ existiert. Ist $E_n^A = E_m^{A+B}$ für $m,n\in\mathbb{Z}$ mit $m,n\leq -1$ oder $m,n\geq 2$, dann folgt:

(1) B ist stetig fortsetzbar zu einem Element aus $L(E,E_n^A)$, falls $m,n\leq -1$ ist.

(2) $B\in L(E_n^A,E_1^A)$, falls $m,n\geq 2$ ist.

Beweis: (1) Sind $n,m \leq -1$, dann ist $(A+B)_{-1}$ aus $\mathcal{L}(E,E_m^{A+B})$ und damit auch aus $\mathcal{L}(E,E_n^A)$ wegen $E_n^A = E_m^{A+B}$. Da A_{-1} ebenfalls ein Element aus $\mathcal{L}(E,E_n^A)$ ist und da für alle x aus der in E dichten Teilmenge E_1^A gilt:

$$Bx = (A+B)x - Ax = (A+B)_{-1}x - A_{-1}x,$$

ist B stetig fortsetzbar zu einem Element aus $\mathcal{L}(E,E_n^A)$.

(2) Sei $m,n \geq 2$. Dann ist $A_n \in \mathcal{L}(E_n^A,E_1^A)$ und $(A+B)_m$ ist aus $\mathcal{L}(E_m^A,E_1^A)$. Wegen $E_n^A = E_m^{A+B}$ ist $(A+B)_m \in \mathcal{L}(E_n^A,E_1^A)$, weshalb auch $(A+B)_m - A_n \in \mathcal{L}(E_n^A,E_1^A)$ ist. Wegen $B \in \mathcal{L}(E_1^A,E)$ ist $B \in \mathcal{L}(E_n^A,E)$. Somit gilt für alle x aus E_n^A

$$(A+B)_m x - A_m x = Ax + Bx - Ax = Bx \in E_1^A,$$

woraus $B \in \mathcal{L}(E_n^A,E_1^A)$ folgt. □

Im folgenden werden einige Beispiele zur Veranschaulichung von Theorem 4.3 gegeben. Insbesondere wird gezeigt, daß 4.3 in dem Sinne optimal ist, daß es Operatoren $B \in \mathcal{L}(E)$ gibt, für die genau drei Stufen der beiden Türme $(E_n^A)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(E_n^{A+B})_{n\in\mathbb{Z}}$ übereinstimmen.

Beispiel 4.7: Sei $(E_n^A)_{n\in\mathbb{Z}}$ der zum unbeschränkten, dicht definierten Operator A gehörende Sobolev-Turm und sei $Bf := \mu(f)g$ mit $f \in E$, $0 \neq \mu \in E'$ und $g \in E$, aber $g \notin E_1^A$. Damit ist $B \in \mathcal{L}(E)$ und nach Theorem 4.3 ist $E_1^A = E_1^{A+B}$ und $E_{-1}^A = E_{-1}^{A+B}$. Für die anderen Stufen der beiden Türme $(E_n^A)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(E_n^{A+B})_{n\in\mathbb{Z}}$ gilt folgendes:

(1) $E_n^A \neq E_m^{A+B}$ für $n,m \geq 2$, denn da E_n^A dicht in E liegt für alle $n \geq 2$, existiert zu n ein $f_n \in E_n^A$ mit $\mu(f_n) \neq 0$. $\mu(f_n)g$ ist nicht aus E_1^A aufgrund der Wahl von g. Damit ist $B \notin \mathcal{L}(E_n^A,E_1^A)$ für $n \geq 2$, was nach Lemma 4.6 für $m \geq 2$ $E_n^A \neq E_m^{A+B}$ zur Folge hat.

(2) Sei $n \leq -2$ und $f \in E$. Dann gilt

$$\|Bf\|_n^\Lambda = \|\mu(f)R(\lambda,\Lambda)^{-n}g\| = |\mu(f)|\,\|R(\lambda,\Lambda)^{-n}g\|.$$

Damit ist B genau dann aus $L(E_{-1}^\Lambda, E_n^\Lambda)$, wenn μ eine stetige Linearform auf E_{-1}^Λ ist, d.h. daß $\mu \in D(\Lambda')$ ist nach Satz 1.19. Ist $\mu \notin D(\Lambda')$, dann ist $E_n^\Lambda \neq E_m^{\Lambda+B}$ für alle $n,m \leq -2$, was mit Lemma 4.6 folgt, wenn in 4.6 Λ_{-1} anstatt Λ und E_{-1}^Λ als Grundraum genommen wird.

Für $\mu \in D(\Lambda')$ ist B fortsetzbar zu einem Operator $B_1 \in L(E_{-1}^\Lambda)$ und aus Theorem 4.3 folgt $E_{-2}^\Lambda = E_{-2}^{\Lambda+B}$, wobei B_1 auf E mit B identifiziert wird.

Beispiele 4.8: (a) Sei $(\Lambda, D(\Lambda))$ ein dicht definierter Operator auf E mit $\rho(\Lambda) \neq \emptyset$ und $B := Id_E$. Damit ist B für alle $n \in \mathbb{Z}$ auf kanonische Weise zu einem Element aus $L(E_n^\Lambda)$ fortsetzbar bzw. einschränkbar und wegen Theorem 4.3 stimmen die von Λ und $\Lambda+B$ erzeugten Sobolev-Türme überein.

(b) Sei $E := C_0(\mathbb{R})$ und $Af := f'$ mit $D(A) := \{f \in E \mid f' \in E\}$. Setze $Bf := qf$ mit $q(x) := \exp(-x^2)$. Dann ist $B \in L(E)$ und $q^{(n)} \in E$ für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus man mittels Lemma 1.6 leicht erkennt, daß $B \in L(E_n^\Lambda)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Mit Theorem 4.3 ist $E_n^\Lambda = E_n^{\Lambda+B}$ für $n \geq -1$.

(c) Seien E und Λ wie in (b) definiert und sei $Bf := qf$ mit $q(x) := \exp(-|x|^n)$ für ein $n \geq 1$. Damit ist q genau $(n-1)$-mal stetig differenzierbar mit $q^{(k)} \in E$ $(k \leq n-1)$. Mittels Lemma 1.6 läßt sich zeigen, daß $B \in L(E_k^\Lambda)$ ist für $0 \leq k \leq n-1$, was mit Theorem 4.3 zur Folge hat, daß $E_k^\Lambda = E_k^{\Lambda+B}$ ist für $-1 \leq k \leq n$.

Für $g(x) := \exp(-x^2)$ ist $g \in E_\infty^\Lambda$, aber Bg ist nicht n-mal differenzierbar. Daher liegt auch $(A+B)g$ nicht in E_n^Λ, weshalb für

$m \geq n+1$ der Operator B, eingeschränkt auf E_m^A, nicht aus $\mathcal{L}(E_m^A, E_n^A)$ ist. Mit Lemma 4.6 folgt $E_k^A \neq E_m^{A+B}$ für $k, m \geq n+1$.

Wie Beispiel 4.7 zeigt, läßt sich ein Operator $B \in \mathcal{L}(E)$ i.a. nicht stetig auf E_{-1}^A fortsetzen, wodurch i.a. auch nicht mehr gewährleistet ist, daß E_{-2}^A und E_{-2}^{A+B} übereinstimmen.
Der nächste Satz liefert eine hinreichende Bedingung für die stetige Fortsetzbarkeit eines Operators $B \in \mathcal{L}(E_n^A)$ zu einem Element aus $\mathcal{L}(E_{n-1}^A)$, woraus mit Theorem 4.3 die Übereinstimmung von E_{n-2}^A und $E_{-2}^{(A_n+B)}$ folgt.

Satz 4.9: Sei A Generator auf E, $B \in \mathcal{L}(E_n^A)$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ und seien die Operatoren $C_1, C_2 \in \mathcal{L}(E_{n+1}^A, E_{n-1}^A)$ wie folgt definiert:

$$C_1 := A_{n-1}B - BA_n \quad \text{und} \quad C_2 := A_{n-1}B + BA_n.$$

Falls sich einer der beiden Operatoren C_i, $i=1,2$, stetig fortsetzen läßt zu einem Element aus $\mathcal{L}(E_n^A)$, d.h. falls gilt: $C_i(E_{n+1}^A) \subset E_n^A$ und $\|C_i(x)\|_n^A \leq c\|x\|_n^A$ für ein $c \in \mathbb{R}_+$ und alle x aus einer dichten Teilmenge von E_n^A, dann folgt

(1) $B \in \mathcal{L}(E_{n-1}^A)$ und

(2) $E_{n-2}^A = E_{-2}^{(A_n+B)}$.

Beweis: Für alle $x \in E_{n+1}^A$ gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\|Bx\|_{n-1}^A &= \|R(\lambda,A)_n B x\|_n^A = \|R(\lambda,A)_n B(\lambda-A)_n R(\lambda,A)_n x\|_n^A \\
&\leq \|\lambda R(\lambda,A)_n B R(\lambda,A)_n x\|_n^A \\
&\quad + \|R(\lambda,A)_{n-1}(C_1 - A_{n-1}B)R(\lambda,A)_n x\|_n^A \\
&\leq \|\lambda R(\lambda,A)_n B\|_{n,n} \|x\|_{n-1}^A + \|R(\lambda,A)_n\|_{n,n} \|C_1\|_{n,n} \|x\|_{n-1}^A \\
&\quad + \|R(\lambda,A)_{n-1} A_{n-1}\|_{n,n} \|B\|_{n,n} \|x\|_{n-1}^A .
\end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, daß sich $R(\lambda,A)_n A_n$ stetig fortsetzen

läßt zum Operator $R(\lambda,A)_{n-1}A_{n-1} \in L(E_n^A)$. Analog verläuft der Beweis, falls $C_2 \in L(E_n^A)$ ist. Die Behauptung (2) folgt sofort aus Korollar 4.4. []

Es folgen nun einige typische Beispiele, bei denen die Voraussetzungen von 4.9 erfüllt sind. Insbesondere werden noch weitergehende Aussagen für die in 4.8(b) und 4.8(c) diskutierten Beispiele gemacht.

Beispiel 4.10: (a) Falls $B \in L(E)$ in dem Sinne mit A kommutiert, daß $B(E_1^A) \subset E_1^A$ und $ABx = BAx$ ist für alle $x \in E_1^A$, dann ist der Operator $C_1 = 0$ und damit B stetig auf E_{-1}^A fortsetzbar. Dies ist der Fall, wenn A der Generator der Gruppe der Rechtstranslationen auf einem der Räume $C_0(\mathbb{R})$ oder $L^p(\mathbb{R})$ $(1 \le p < \infty)$ und B ein Faltungsoperator aus $L(E)$ mit $k \in L^1(\mathbb{R})$ ist:

$$Bf(x) := \int_{\mathbb{R}} k(x-y) f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} k(-y) f(x+y)\,dy.$$

Dann folgt für alle $f \in D(A)$ und alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} ABf(x) &= \frac{d}{dx}\left(\int_{\mathbb{R}} k(-y) f(x+y)\,dy\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} k(-y) f'(x+y)\,dy = BAf(x). \end{aligned}$$

(b) Sei $E := C_0(\mathbb{R})$ und A der Generator der Rechtstranslationsgruppe. Weiter sei $Bf := qf$ mit $q \in E_1^A$, d.h. $q \in E$ und $q' \in E$. Dann ist $B \in L(E_1^A) \cap L(E)$ und $(BA - AB)f = qf' - (qf)' = q'f$. Somit folgt $(BA - AB) \in L(E)$ und mit Satz 4.9 $E_{-2}^A = E_{-2}^{A+B}$.

(c) Seien E, A und B wie in (b) gewählt, nur sei $q \in E_n^A$ mit $n \ge 2$. Nach Teil (b) ist B fortsetzbar zu einem Element aus E_{-1}^A und für den Operator $B_1 := AB - BA$ gilt $(AB_1 - B_1A)f = q''f$ mit $f \in E_1^A$. Aufgrund der Voraussetzung bezüglich q ist der Operator B_2 mit $B_2 f := q''f$ stetig auf E, weshalb sich B_1 wegen Satz 4.9

stetig auf E^A_{-1} fortsetzen läßt. Daraus folgt wiederum mit 4.9, daß B stetig auf E^A_{-2} fortsetzbar ist. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens ergibt sich:

(1) $B \in \mathcal{L}(E^A_m)$ für $-n \leq m \leq 1$, und mittels Theorem 4.3:

(2) $E^A_m \cong E^{A+B}_m$ für $-n-1 \leq m \leq 2$.

Für den in 4.8(b) gegebenen Spezialfall stimmen die durch die Generatoren A bzw. A+B erzeugten Sobolev-Türme in allen Stufen überein. Im Beispiel 4.8(c) gilt $E^A_k \cong E^{A+B}_k$ für alle $n \geq k \geq -n$.

Während im ersten Teil dieses Abschnitts der Schwerpunkt auf der Untersuchung solcher Störungen lag, die auf mindestens einer Stufe beschränkt sind, so werden im folgenden Operatoren B untersucht, welche stetig von E^A_n nach E^A_m sind mit $n,m \in \mathbb{Z}$. Dabei wird von Lemma 2.7 und Lemma 4.1 Gebrauch gemacht. Aus 4.1 ergibt sich sofort

Proposition 4.11: Sei A Generator, $B \in \mathcal{L}(E^A_1, E)$ und es gelte, falls λ gegen $+\infty$ geht:

(1) $\|BR(\lambda,A)\|_{0,0} \to 0$ oder

(2) $\|R(\lambda,A)B\|_{1,1} \to 0$.

Dann existiert ein $\lambda_0 > 0$, so daß für alle $\lambda > \lambda_0$ gilt: $\lambda \in \rho(A+B)$. Insbesondere ist $E^A_1 \cong E^{A+B}_1$.

Beweis: Falls (1) eintritt, dann existiert ein $\lambda_0 > 0$, so daß $\|BR(\lambda,A)\|_{0,0} < 1$ ist für alle $\lambda > \lambda_0$, woraus mit 4.1(1) die Behauptung folgt. Wenn (2) eintritt, dann wird 4.1(2) verwendet. □

Die Voraussetzung (1) in Proposition 4.11 bedeutet insbesondere, daß B bezüglich A die relative Schranke 0 hat, d.h. daß es für alle $\varepsilon>0$ ein $a\in\mathbb{R}_+$ gibt, so daß für alle $x\in D(A)$ gilt:

$$\|Bx\| \leq a\|x\| + \varepsilon\|Ax\|,$$

denn aus 4.11(1) folgt für alle $x\in D(A)$ und $\lambda>0$

$$\|Bx\| \leq \|BR(\lambda,A)\|\|(\lambda-A)x\| \leq \lambda\|BR(\lambda,A)\|\|x\| + \|BR(\lambda,A)\|\|Ax\|.$$

Ist A Generator einer beschränkten holomorphen Halbgruppe und $B\in L(E_1^A,E)$, dann ist unter diesen Voraussetzungen nach einem Resultat von Kato(1) der Operator A+B Generator einer holomorphen Halbgruppe. Der Operator B hat insbesondere dann bezüglich A die relative Schranke 0, wenn der Banachraum E reflexiv und B relativ kompakt bezüglich A ist (siehe P.Hess, Davies, Lemma 3.11).

Beispiele für relativ kompakte Störungen sind Operatoren B, die sich durch (relativ beschränkte) Operatoren mit endlichdimensionalem Bild approximieren lassen. Wenn E nicht reflexiv ist, dann haben solche Operatoren B nicht notwendigerweise relative Schranke 0 bezüglich A, was in Kapitel 6 Beispiel 6.8 erörtert wird. In einem solchen Fall kann eine solche Störung B dennoch die Eigenschaft (2) in Proposition 4.11 haben (siehe Satz 6.11), weshalb folgender Satz interessant ist.

Satz 4.12: Sei A Generator einer beschränkten holomorphen Halbgruppe mit $\|T(t)\| \leq M$ $(t\geq 0)$. Gilt für $B\in L(E_1^A,E)$ und $\lambda>0$

$$\|R(\lambda,A)B\|_{1,1} \to 0 \quad \text{für } \lambda\to+\infty,$$

dann ist A+B Generator einer holomorphen Halbgruppe.

Beweis: Es wird der Operator $R(\mu,A)B$ für alle μ aus einer rechten Halbebene in $\mathbb{C}$ in der $\|\cdot\|_{1,1}$-Norm abgeschätzt, wobei $\lambda\in\rho(A)$ mit $Re\mu\geq\lambda>0$ ist. Damit ergibt sich unter Verwendung von 2.4(1) und 2.4(4)

$$\begin{aligned}\|R(\mu,A)B\|_{1,1} &= \|((R(\mu,A)-R(\lambda,A))+R(\lambda,A))B\|_{1,1}\\ &\leq \|(R(\lambda,A)-R(\mu,A))B\|_{1,1} + \|R(\lambda,A)B\|_{1,1}\\ &= \|(\mu-\lambda)R(\lambda,A)R(\mu,A)B\|_{1,1} + \|R(\lambda,A)B\|_{1,1}\\ &\leq (1 + M\tfrac{|\mu-\lambda|}{|\mu|})\|R(\lambda,A)B\|_{1,1}\\ &\leq (1+M)\|R(\lambda,A)B\|_{1,1}. \qquad (4.12.1)\end{aligned}$$

Aufgrund der Voraussetzung an $\|R(\lambda,A)B\|_{1,1}$ gibt es ein $\lambda_0>0$ mit $(1+M)\|R(\lambda_0,A)B\|_{1,1} = \alpha < 1$. Deshalb gilt für alle μ mit $Re\mu\geq\lambda_0$

$$\|R(\mu,A)\|_{1,1} \leq \alpha < 1,$$

woraus mit Lemma 4.1 folgt, daß

$$R(\mu,A+B) = (1-R(\mu,A)B)^{-1}R(\mu,A)$$

als bijektiver stetiger Operator von E nach E_1^A existiert. $R(\mu,A+B)$ ist damit auch aus $\mathcal{L}(E_1^A)$. Unter Verwendung von 2.4(1) gilt die Abschätzung

$$\|R(\mu,A+B)\|_{1,1} \leq \|(1-R(\mu,A)B)^{-1}\|_{1,1}\|R(\mu,A)\|_{1,1} \leq \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{M}{|\mu|}.$$

Da $R(\mu,A+B)\in\mathcal{L}(E)$ ist für $Re\mu\geq\lambda_0$, ergibt sich

$$\begin{aligned}\|R(\mu,A+B)\|_{0,0} &= \|(\lambda_0-A-B)R(\lambda_0,A+B)R(\mu,A+B)\|_{0,0}\\ &= \|(\lambda_0-A-B)R(\mu,A+B)R(\lambda_0,A+B)\|_{0,0}\\ &\leq \|\lambda_0-A-B\|_{1,0}\|R(\mu,A+B)\|_{1,1}\|R(\lambda_0,A+B)\|_{0,1}\\ &\leq \frac{c}{1-\alpha}\cdot\frac{M}{|\mu|}\end{aligned}$$

für ein $c\in\mathbb{R}_+$ und für alle μ aus einer rechten Halbebene. Damit ist $(A+B,D(A))$ Generator einer holomorphen Halbgruppe. □

Wie aus der Abschätzung (4.12.1) ersichtlich ist, genügt für die Aussage des Satzes die Bedingung $\|R(\lambda,A)B\|_{1,1} < \frac{1}{1+M}$ für ein reelles $\lambda\in\rho(A)$.

Andererseits zeigt das Beispiel 4.2, daß für $B\in\mathcal{L}(E_1^A,E)$ i.a. keine der in Proposition 4.11 an $BR(\lambda,A)$ bzw. $R(\lambda,A)B$ gestellten Anforderungen erfüllt sind. Für diese allgemeinen Fall läßt sich dennoch folgendes aussagen.

Satz 4.13: Sei $B\in\mathcal{L}(E_1^A,E)$ und sei A Generator einer Halbgruppe $(T(t))$. Dabei gelte für alle $t\geq 0$ $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ mit $M\geq 1$, $\omega\geq 0$. Ist die $\|\cdot\|_1^A$-Norm mittels $\lambda_0>0$ $(\lambda_0>\omega)$ definiert und gilt

$$\|B\|_{1,0} < \frac{1}{M+1},$$

dann ist λ-A-B invertierbar für alle $\lambda\geq\frac{1}{2}(\lambda_0-\omega)$, was insbesondere $F_1^A \cong E_1^{A+B}$ impliziert.

Beweis: Aus Lemma 2.7 ergibt sich für $n=1$ und $\lambda\geq\frac{1}{2}(\lambda_0-\omega)$

$$\|BR(\lambda,A)\|_{0,0} \leq \|B\|_{1,0}\|R(\lambda,A)\|_{0,1} < 1.$$

Mit Lemma 4.1(1) folgt die Behauptung. □

Aus Satz 4.13 ergibt sich sofort

Korollar 4.14: Sei $B\in\mathcal{L}(E_1^A,E)$, A Generator einer Halbgruppe $(T(t))$ mit M,ω wie in Satz 4.13 und sei die $\|\cdot\|_1^A$-Norm mittels $\lambda_0>0$ $(\lambda_0>\omega)$ definiert. Gibt es ein $a\in(0,1)$ mit

$$\|(1-a)B-aA\|_{1,0} < \frac{1}{M+1},$$

dann gibt es ein $\lambda_1>0$, so daß die Resolvente $R(\lambda,A+B)$ für alle $\lambda>\lambda_1$ existiert, was auch $E_1^A \cong E_1^{A+B}$ impliziert.

Beweis: Nach Satz 4.13 ist $\lambda-A-((1-a)B-aA) = \lambda-(1-a)(A+B)$ invertierbar, falls $\lambda \geq \lambda' := \frac{1}{2}(\lambda_0-\omega)$ ist. Damit ist $\lambda \in \rho(A+B)$ für alle λ mit $\lambda > \lambda_1 := \lambda'/(1-a)$. □

Satz 4.13 wird nun mit Hilfe von Lemma 2.8 so verschärft, daß eine Aussage über die Existenz von $R(\lambda,A+B)$ auch für nicht-reelle λ gemacht werden kann.

Satz 4.15: Sei A Generator einer Halbgruppe $(T(t))$ mit M,ω wie in Satz 4.13 und es sei $B \in \mathcal{L}(E_1^A,E)$. Ist S_α definiert als

$$S_\alpha := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid Re\lambda > 0 \text{ und } |\tfrac{Im\lambda}{Re\lambda}| < \alpha,\ \alpha > 0\},$$

dann gibt es eine Konstante $c>0$, so daß gilt:

Ist $\|B\|_{1,0} < c$ und die $\|\cdot\|_1^A$-Norm mittels $\lambda_0 > \omega$ definiert, dann ist $\lambda \in \rho(A+B)$ für alle $\lambda \in S_\alpha$ mit $Re\lambda \geq \lambda_0$.

Beweis: Aus Lemma 2.8 folgt für S_α die Existenz einer von λ_0 abhängigen Konstante c, so daß gilt:

$$\|R(\lambda,A)\|_{0,1} \leq c$$

für alle $\lambda \in S_\alpha$ mit $Re\lambda \geq \lambda_0$. Ist $\|B\|_{1,0} < 1/c$, dann folgt mit Lemma 4.1 die Behauptung. □

5. Ein abstrakter Volterra-Operator

In diesem Kapitel wird zunächst die Frage untersucht, welche Klasse von Operatoren überhaupt als zulässige Störung eines Generators in Frage kommt. Zulässig bedeutet in diesem Fall, daß der additiv gestörte Generator wieder ein Generator einer stark-stetigen Halbgruppe ist.

Der in diesem Kapitel mittels des Störoperators eingeführte Integraloperator, welcher die Gestalt eines Volterra-Operators hat, wird ein wichtiges Hilfsmittel zur Bestimmung einer Klasse zulässiger Störungen sein. Dazu sind zunächst einige Vorüberlegungen notwendig.

Wenn $(T(t))$ und $(S(t))$ stark-stetige Halbgruppen auf E sind mit den Generatoren $(A,D(A))$ bzw. $(C,D(C))$, dann kann es vorkommen, daß $D(A) \cap D(C)$ nicht dicht in E liegt oder sogar nur aus $\{0\}$ besteht. Als Beispiel diene $E := C_0(\mathbb{R})$, $Af := f'$ und $Cf := qf$ mit jeweils maximalem Definitionsbereich. Dabei sei $q \in C_0(\mathbb{R})$ reell und nirgends differenzierbar mit $q(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit scheint zwischen A und C kein Zusammenhang zu bestehen, d.h. es scheint nicht möglich zu sein, C als Summe von A und einer Störung B darzustellen. Wird aber der in Kapitel 1 eingeführte Banachraum E_{-1}^A zuhilfe genommen, dann ist dies sehr wohl möglich, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 5.1: Seien $(A,D(A))$ und $(C,D(C))$ die Generatoren der auf E stark-stetigen Halbgruppen $(T(t))$ bzw. $(S(t))$. Dann gibt es einen Operator $B \in \mathcal{L}(E_1^C, E_{-1}^A)$, so daß für alle $x \in D(C)$ gilt:

$$Cx = A_{-1}x + Bx.$$

Beweis: Da A_{-1} auf E definiert und D(C) eine dichte Teilmenge von E ist, ist folgender lineare Operator B wohldefiniert:

$$B: D(C) \to E_{-1}^{A} : x \to Cx - A_{-1}x.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\|Bx\|_{-1}^{A} &= \|R(\lambda,A)_{-1}Bx\| = \|R(\lambda,A)_{-1}Cx - R(\lambda,A)_{-1}A_{-1}x\| \\ &\leq \|R(\lambda,A)\|\|Cx\| + \|R(\lambda,A)_{-1}A_{-1}x\| \\ &\leq c_1\|x\|_1^C + c_2\|x\| \leq c\|x\|_1^C\end{aligned}$$

mit $c_1, c_2, c \in \mathbb{R}_+$, wobei Lemma 1.2 verwendet wurde. □

Verschiebt man das Ganze um eine Stufe, dann ergibt sich folgendes Korollar.

Korollar 5.2: Sei (A,D(A)) Generator einer Halbgruppe (T(t)) auf E und (C,D(C)) Generator einer Halbgruppe (S(t)) auf E_1^A. Dann ist D(C) ein Gen von (A,D(A)) und es existiert ein Operator $B \in \mathcal{L}(E_1^C, E)$, so daß für alle $x \in D(C)$ gilt:

$$Cx = Ax + Bx.$$

Beweis: Da (S(t)) eine Halbgruppe auf E_1^A ist, ist deren Generator auf E_1^A dicht definiert, was gerade bedeutet, daß D(C) ein Gen von (A,D(A)) ist. Wenden wir Lemma 5.1 an auf die nach Satz 2.4 auf E_1^A definierte Halbgruppe $(T_1(t))$, deren Generator $(A_1, D(A^2))$ ist, dann folgt die Behauptung. Insbesondere gilt für alle $x \in D(B)$, welche nicht in $D(A^2)$ liegen, $Bx \notin D(A)$, aber $Ax + Bx \in D(A)$. □

Für zwei stark-stetige Halbgruppen (T(t)) und (S(t)) mit ihren Generatoren (A,D(A)) bzw. (C,D(C)) wird für $t \geq 0$ folgende

Abbildung ϕ definiert:

$$\phi\colon [0,t] \to L(E)\colon \phi(s) := T(t-s)S(s)$$

Für alle $x\in D(C)$ ist ϕ_x mit $\phi_x(s) := T(t-s)S(s)x$ differenzierbar in der $\|\cdot\|_{-1}^{A}$-Norm. Ist B der in Lemma 5.1 definierte Operator, dann folgt mit 5.1

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\phi_x(s) &= (\frac{d}{ds}T(t-s))S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x\\ &= -A_{-1}T(t-s)S(s)x + T(t-s)CS(s)x\\ &= -T_{-1}(t-s)A_{-1}S(s)x + T(t-s)(A_{-1}+B)S(s)x\\ &= T_{-1}(t-s)BS(s)x.\end{aligned}$$

Für das weitere Vorgehen ist folgende Bezeichnung wichtig.

Bezeichnung 5.3: Für einen Banachraum F bezeichne mit $\hat{F}(r)$ den Banachraum $C([0,r],F)$ $(r>0)$, versehen mit der Norm

$$\|u(\cdot)\|_{\hat{F}(r)} := \sup_{0\le s\le r}\|u(s)\|_F \quad \text{mit } u\in\hat{F}(r).$$

Bleibt r fest und sind Verwechslungen auszuschließen, dann schreibe $\hat{F}$ anstatt $\hat{F}(r)$.

Mittels dieser Bezeichnung ist die vorher untersuchte Funktion ϕ_x' ein Element aus $(E_{-1}^{A})\hat{}\,(r)$, und durch Integration erhalten wir

$$\int_0^t(\frac{d}{ds}\phi_x(s))ds = S(t)x - T(t)x = \int_0^t T_{-1}(t-s)BS(s)xds. \qquad (5.4)$$

Diese Gleichungen sind die Motivation zur Definition des folgenden abstrakten Volterra-Operators (siehe auch Johnson).

Definition 5.5: Sei $(A,D(A))$ Generator der Halbgruppe $(T(t))$ auf E, $(F,\|\cdot\|_F)$ ein stetig und dicht in E eingebetteter Banachraum und sei $B\in\mathcal{L}(F,E^A_{-1})$. Dann definiere den Operator V_r für ein festes $r>0$ wie folgt:

$$V_r: \hat{F} \to (E^A_{-1})\hat{} \; : u \to V_r u \quad \text{mit}$$

$$V_r(u(\cdot))(t) := \int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds, \quad 0\le t\le r.$$

Bemerkung 5.6: Wegen $B\in\mathcal{L}(F,E^A_{-1})$ ist V_r wohldefiniert und ein Element aus $\mathcal{L}(\hat{F},(E^A_{-1})\hat{})$. Das Ziel des durch Lemma 5.1 und Gleichung (5.4) motivierten Vorgehens besteht darin, F und B so zu wählen, daß F und E^C_1 übereinstimmen, wobei $(C,D(C))$ mit $C = A_{-1}+B$ der Generator der gestörten Halbgruppe ist.

Aufgrund von Satz 2.4 kann auf völlig analoge Weise für jedes $n\in\mathbb{Z}$ und jede auf E^A_n stark-stetige Halbgruppe $(S(t))$ ein solcher Operator $V_r\in\mathcal{L}((\hat{F},(E^A_{n-1})\hat{})$ definiert werden, wobei F und B entsprechend gewählt werden. Daher lassen sich die im folgenden für die Stufe 0, d.h. für E bewiesenen Sätze analog für die n-te Stufe beweisen.

Für das weitere Vorgehen sollen unter Voraussetzung von Definition 5.5 für V_r folgende Bedingungen gelten:

$V_r(\hat{F}) \subset \hat{E}$ und V_r ist stetig fortsetzbar zu einem Element aus $\mathcal{L}(\hat{E})$. (5.6.1)

Gelten die Bedingungen (5.6.1) mit $\|V_r\| < 1$, dann ist V_r

stetig invertierbar auf $\hat{E}$ und $(1-V_r)^{-1}$ ist darstellbar durch die Neumann'sche Reihe, d.h.

$$(1-V_r)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (V_r)^n .$$

Betrachtet man für alle $x \in D(C)$ $T(\cdot)x$ und $S(\cdot)x$ als Elemente aus $\hat{E}$, dann hat Gleichung (5.4) folgende Form:

$$T(\cdot)x = (1-V_r)S(\cdot)x . \tag{5.7}$$

Es ist also zu erwarten, daß unter geeigneten Anforderungen an die Störung B für alle $x \in E$ gilt:

$$S(\cdot)x = \sum_{n=0}^{\infty} (V_r)^n T(\cdot)x . \tag{5.8}$$

Ist $B \in \mathcal{L}(E)$, dann kann Gleichung (5.8) als die Phillips-Dyson-Entwicklung der gestörten Halbgruppe interpretiert werden (siehe auch Davies, Theorem 3.1, oder etwas allgemeiner in Dunford/Schwartz, Chapter VIII.1, Theorem 19 sowie J.Voigt).

Wie in Satz 5.14 in Verbindung mit Beispiel 6.14(c) und Korollar 6.15 gezeigt wird, ist weder die Voraussetzung $B \in \mathcal{L}(E)$ noch die Voraussetzung, daß der Integrand von V_r, d.h. die Funktion $s \to T_{-1}(t-s)Bu(s)$ für $u \in \hat{E}$ ein Element aus $\hat{E}$ ist, zur Gültigkeit von (5.6.1) notwendig. Vielmehr genügt folgende Bedingung.

Lemma 5.9: Es gelte (5.6.1) mit $\|V_r\| \leq c$, $c \in \mathbb{R}_+$, $r>0$. Dann ist B stetig fortsetzbar zu einem Element aus $\mathcal{L}(E, E^A_{-1})$.

Beweis: Wir zeigen $R(\lambda,A)_{-1}B \in \mathcal{L}(E)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}_+ \cap \rho(A)$ mit $\lambda > \omega$. Betrachtet man $s \to e^{\lambda s}x$ für $x \in F$ als ein Element aus $\hat{E}$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left\| \int_{nr}^{(n+1)r} e^{-\lambda s} T_{-1}(s)Bx\,ds \right\| &= \left\| e^{-\lambda nr} T(nr) \int_0^r e^{\lambda(s-r)} T_{-1}(r-s)Bx\,ds \right\| \\ &\leq M e^{(\omega-\lambda)nr} \|V_r\| \|x\|.\end{aligned}$$

Wegen $\lambda > \omega$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{nr}^{(n+1)r} e^{-\lambda s} T_{-1}(s)Bx\,ds \right)$ absolut und stellt das Element $R(\lambda,A)_{-1}Bx \in E$ dar. Dabei gilt $\|R(\lambda,A)_{-1}Bx\| \leq M\|V_r\| \sum_{n=0}^{\infty} e^{(\omega-\lambda)nr} \|x\|$, woraus die Behauptung folgt, da F dicht in E liegt. □

Lemma 5.10: Für alle $t \leq r$ mit $r > 0$ sei V_t aus $\mathcal{L}(\hat{E})$ im Sinne von (5.6.1). Geht $\|V_t\| \to 0$ für $t \to 0$, dann gilt:

(1) $\|R(\lambda,A)_{-1}B\| \to 0$ für $\lambda \to +\infty$.

(2) Es gibt ein $\lambda > 0$, so daß $\lambda - A_{-1} - B$ ein stetig invertierbarer Operator von E nach E_{-1}^{A} ist.

Beweis: (1) Für alle $x \in F$ gilt

$$\begin{aligned}\|R(\lambda,A)_{-1}Bx\| &= \left\| \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} T_{-1}(s)Bx\,ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t e^{-\lambda s} T_{-1}(s)Bx\,ds + \int_t^{\infty} e^{-\lambda s} T_{-1}(s)Bx\,ds \right\| \\ &\leq \left\| \int_0^t e^{-\lambda s} T_{-1}(s)Bx\,ds \right\| + \left\| \int_0^{\infty} e^{-\lambda(s+t)} T_{-1}(s+t)Bx\,ds \right\| \\ &\leq e^{-\lambda t} \|V_t e^{\lambda \cdot} x\|_{\hat{E}} + \|e^{-\lambda t} T(t)\| \|R(\lambda,A)_{-1}Bx\|.\end{aligned}$$

Ist nun $\lambda > 0$ so groß, daß $\|e^{-\lambda t} T(t)\| = c < 1$ ist, dann folgt

$$\|R(\lambda,A)_{-1}Bx\| \leq (1-c)^{-1} e^{-\lambda t} \|V_t\| \|e^{\lambda \cdot} x\|_{\hat{E}} \leq (1-c)^{-1} \|V_t\| \|x\|.$$

Da $\|V_t\| \to 0$ geht für $t \to 0$, folgt die Behauptung.

(2) Folgt aus (1) wie in Lemma 4.1, wenn man die Identität $\lambda - A_{-1} - B = (\lambda - A)_{-1}(1 - R(\lambda,A)_{-1}B)$ betrachtet. □

Ist A Generator einer beschränkten holomorphen Halbgruppe, dann folgt aus Lemma 5.10, Satz 4.12 und Satz 2.4 leicht, daß A_{-1} + B Generator einer holomorphen Halbgruppe auf E_{-1}^A ist. Es gilt aber noch folgende weitergehende Aussage, ohne daß A Generator einer holomorphen Halbgruppe sein muß.

Satz 5.11: Sei (A,D(A)) Generator der Halbgruppe (T(t)) auf E und es sei $V_r \in L(\hat{E})$ für $0 \le r \le r_0$ und $r_0 > 0$ im Sinne von (5.6.1) (d.h. mit Lemma 5.9 gilt $B \in L(E, E_{-1}^A)$). Falls $\|V_r\| \to 0$ geht für $r \to 0$ und $\|V_r\| < 1$ ist für alle $r \le r_0$, dann gilt:

(a) Für $0 \le t \le r$ wird durch

$$S(t)x := \sum_{n=0}^{\infty} ((V_r)^n T(\cdot)x)(t)$$

eine Familie in $L(E)$ definiert, welche auf kanonische Weise zu einer stark-stetigen Halbgruppe auf E fortgesetzt werden kann.

(b) Ist (C,D(C)) der Generator von (S(t)), dann hat der Generator C_{-1} von $(S_{-1}(t))$ die Form $C_{-1} = A_{-1}+B$ und es ist $E_{-1}^A \cong E_{-1}^C$.

(c) $D(C) = \{x \in E \mid (A_{-1}x + Bx) \in E\}$ und $Cx = A_{-1}x + Bx$ für alle $x \in D(C)$.

Beweis: (a) Für $x,y \in E$ seien $T(\cdot)x$, $T(\cdot)y$ und $T(\cdot)(x+y)$ die durch die Halbgruppe (T(t)) erzeugten Elemente aus $\hat{E}$.

(a_1) Wegen $\|V_r\| < 1$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (V_r)^n$ absolut konvergent in $L(\hat{E})$ und für alle $k>0$ und $0 \le t \le r$ gilt

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{n=0}^{\infty} ((V_r)^n T(\cdot)x)(t) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} (V_r)^n T(\cdot)x\right)(t) \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=k}^{\infty} ((V_r)^n T(\cdot)x)(t) + \left(\sum_{n=0}^{k-1} (V_r)^n T(\cdot)x\right)(t) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=0}^{k-1} ((V_r)^n T(\cdot)x)(t) + \left(\sum_{n=k}^{\infty} (V_r)^n T(\cdot)x\right)(t) \right\|
\end{aligned}$$

$\leq 2\sum_{n=k}^{\infty} \|(V_r)^n T(\cdot)x\|_{\hat{E}} \to 0$ für $k \to +\infty$, womit folgt:

$$(\sum_{n=0}^{\infty}(V_r)^n T(\cdot)x)(t) = \sum_{n=0}^{\infty}((V_r)^n T(\cdot)x)(t).$$

(a_2) $S(t)$ ist linear, denn für $x,y \in E$ gilt

$$(V_r)^0 T(\cdot)(x+y)(t) = T(t)(x+y)$$
$$= (V_r)^0 T(\cdot)x(t) + (V_r)^0 T(\cdot)y(t).$$

Durch Induktion erhalten wir für $n \geq 1$

$$(V_r)^n T(\cdot)(x+y)(t) = V_r(V_r)^{n-1}T(\cdot)(x+y)(t)$$
$$= \int_0^t T_{-1}(t-s)B((V_r)^{n-1}T(\cdot)(x+y)(s))ds$$
$$= \int_0^t T_{-1}(t-s)B((V_r)^{n-1}T(\cdot)x(s) + (V_r)^{n-1}T(\cdot)y(s))ds$$
$$= (V_r)^n T(\cdot)x(t) + (V_r)^n T(\cdot)y(t), \text{ woraus aufgrund der}$$

absoluten Konvergenz der Reihe die Behauptung folgt.

(a_3) Für $0 \leq t \leq r \leq r_0$ ist $S(t) \in L(E)$, denn für alle $x \in E$ gilt

$$\|S(t)x\| = \|\sum_{n=0}^{\infty}((V_r)^n T(\cdot)x)(t)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\|V_r\|^n \|T(\cdot)x\|_{\hat{E}}$$
$$\leq cMe^{\omega r}\|x\| \text{ mit } c,M,\omega \in \mathbb{R}_+.$$

(a_4) Da $\|V_t\| \to 0$ geht für $t \to 0$, folgt für alle $x \in E$

$$\|S(t)x - x\| = \|\sum_{n=0}^{\infty}((V_r)^n T(\cdot)x)(t) - x\|$$
$$= \|\sum_{n=0}^{\infty}((V_t)^n T(\cdot)x)(t) - x\|$$
$$= \|T(t)x - x + \sum_{n=1}^{\infty}((V_t)^n)x)(t)\|$$
$$\leq \|T(t)x - x\| + \sum_{n=1}^{\infty}\|(V_t)^n T(\cdot)x(t)\| \to 0 \text{ für } t \to 0.$$

Mittels (a_5) ergibt sich zusätzlich noch die starke Stetigkeit der Halbgruppe $(S(t))$.

(a_5) Zum Beweis der Halbgruppeneigenschaft von $(S(t))$ sei $x \in E$ und $(s+t) \leq r$.

$$S(t)S(s)x = \sum_{n=0}^{\infty}((V_r)^n T(\cdot)S(s)x)(t)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}((V_r)^n T(\cdot)(\sum_{k=0}^{\infty}((V_r)^k T(\cdot)x)(s))(t)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}((V_r)^k T(\cdot)(V_r)^{n-k}T(\cdot)x(s))(t)$$

Zur Vereinfachung sei $\psi_n^s \in \hat{E}$ wie folgt definiert:

$$\psi_n^s(t) := (\sum_{k=0}^{n}((V_r)^k T(\cdot)(V_r)^{n-k}T(\cdot)x)(s))(t).$$

Aus der Definition von ψ_n^s ergibt sich folgende Eigenschaft:

$$\psi_{n+1}^s(t) = V_r\psi_n^s(t) + T(t)(V_r)^{n+1}T(\cdot)x(s) \qquad (5.11.1)$$

Durch vollständige Induktion zeigen wir

$$\psi_n^s(t) = (V_r)^nT(\cdot)x(s+t). \qquad (5.11.2)$$

Für n=0 ist (5.11.2) erfüllt wegen $T(t)T(s)x = T(s+t)x$. Sei (5.11.2) für $n\geq 0$ gültig. Dann folgt für den ersten Term in Gleichung (5.11.1)

$$\begin{aligned} V_r\psi_n^s(t) &= V_r(V_r)^nT(\cdot)x(s+\cdot)(t) \\ &= \int_0^t T_{-1}(t-u)B(V_r)^nT(\cdot)x(s+u)du \\ &= \int_s^{s+t} T_{-1}(s+t-u)B(V_r)^nT(\cdot)x(u)du. \end{aligned}$$

Für den zweiten Term in (5.11.1) gilt

$$\begin{aligned} T(t)(V_r)^{n+1}T(\cdot)x(s) &= T(t)\int_0^s T_{-1}(s-u)B(V_r)^nT(\cdot)x(u)du \\ &= \int_0^s T_{-1}(s+t-u)B(V_r)^nT(\cdot)x(u)du. \end{aligned}$$

Aus (5.11.1) folgt damit die Gültigkeit von (5.11.2) für n+1. Damit wurde folgendes gezeigt:

$$S(t)S(s)x = \sum_{n=0}^{\infty}((V_r)^nT(\cdot)x)(s+t) = S(s+t)x.$$

Mittels $S(nt) = S(t)^n$ für $n\in\mathbb{N}$ und $0\leq t\leq r_0$ wird eine starkstetige Halbgruppe auf E definiert, womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist.

(b) Nach Proposition 2.3 ist $D(C_{-1}) = E$. Nun ist für $x\in E$ $\lim_{t\downarrow 0}(\frac{1}{t}(S(t)x-x))$ in der Norm $\|\cdot\|_{-1}^C$ zu berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{t}(S(t)x-x) = \tfrac{1}{t}((T(t)x-x) &+ V_rT(\cdot)x(t) \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty}((V_r)^nT(\cdot)x(t)). \end{aligned}$$

Damit folgt:

(b_1) $\lim_{t\downarrow 0}(\frac{1}{t}(T(t)x-x)) = A_{-1}x$ in der $\|\cdot\|_{-1}^A$-Norm.

(b_2) $\frac{1}{t}(V_rT(\cdot)x(t)) = \frac{1}{t}\int_0^t T_{-1}(t-s)BT(s)xds$ konvergiert für $t\to 0$ in der $\|\cdot\|_{-1}^A$-Norm gegen Bx, da der Integrand ein Element aus $(E_{-1}^A)\hat{}$ ist.

(b_3) $\frac{1}{t}\sum_{k=2}^{\infty}((V_r)^n T(\cdot)x)(t) = \frac{1}{t}V_r(\sum_{k=3}^{\infty}(V_r)^n T(\cdot)x)(t)$

$= \frac{1}{t}\int_0^t T_{-1}(t-s)B(\sum_{k=3}^{\infty}(V_r)^n T(\cdot)x)(s)ds.$

Dieser Ausdruck konvergiert in der $\|\cdot\|_{-1}^A$-Norm gegen $B(\sum_{k=3}^{\infty}(V_r)^n T(\cdot)x)(0) = 0$, da $\|V_r\| \to 0$ geht für $r \to 0$.

(b_4) Eine Möglichkeit zur Vollendung des Beweises besteht darin zu zeigen, daß die $\|\cdot\|_{-1}^C$-Norm feiner ist als die $\|\cdot\|_{-1}^A$-Norm.

Der zweite Weg, der hier beschritten wird, besteht darin, den Raum $E_{-1}^A + E_{-1}^C$ mittels folgender Norm $\|\cdot\|^*$ zu vervollständigen:

$$\|x\|^* := \inf\{\|x_1\|_{-1}^A,\ \|x_2\|_{-1}^C \mid x=x_1+x_2,\ x_1 \in E_{-1}^A,\ x_2 \in E_{-1}^C\}.$$

Diese Norm ist sowohl gröber als die $\|\cdot\|_{-1}^A$-Norm als auch die $\|\cdot\|_{-1}^C$-Norm. Wenn $\frac{1}{t}(S(t)x-x)$ für $t \to 0$ in der $\|\cdot\|_{-1}^C$-Norm konvergiert, dann auch in der $\|\cdot\|^*$-Norm. Wegen (b_1), (b_2) und (b_3) konvergiert $\frac{1}{t}(S(t)x-x)$ in der $\|\cdot\|^*$-Norm gegen $A_{-1}x + Bx$, woraus folgt, daß $A_{-1}+B$ Generator von $(S_{-1}(t))$ ist. Lemma 5.10 liefert mit Lemma 4.1 (für E_{-1}^A anstatt E) die Invertierbarkeit von $\lambda-A_{-1}-B$ für ein genügend großes $\lambda>0$, woraus sich die Übereinstimmung E_{-1}^A und E_{-1}^C ergibt.

(c) Folgt aus Satz 2.4, da C eine Einschränkung von C_{-1} und D(C) der maximale Definitionsbereich von C_{-1} in E ist. □

Wie schon in 5.6 bemerkt wurde, kann auf jeder Stufe E_n^A ein solcher Volterra-Operator definiert werden, woraus sich folgendes Korollar ergibt.

Korollar 5.12: Sei A Generator der Halbgruppe $(T(t))$, $n \in \mathbb{Z}$ und sei auf E_n^A entsprechend Definition 5.5 der Operator V_r defi-

niert mit $V_r u(\cdot)(t) = \int_0^t T_{n-1}(t-s)Bu(s)ds$ für $u \in (E_n^A)\hat{}$. Dabei ist $0<r\leq r_0$, $B \in L(F, E_{n-1}^A)$ und F stetig und dicht in E_n^A eingebettet. Ist V_r im 5.6 und 5.6.1 entsprechenden Sinne ein Element aus $L((E_n^A)\hat{})$ mit $\|V_r\| \to 0$ für $r \to 0$, dann wird durch

$$S(t)x := \sum_{k=0}^{\infty} ((V_r)^k T_n(\cdot)x)(t)$$

im Sinne von 5.11 eine stark-stetige Halbgruppe auf E_n^A erzeugt. Der Generator der auf E_{n-1}^A definierten Halbgruppe $(S_{-1}(t))$ ist der Operator $A_{n-1}+B$ mit Definitionsbereich E_n^A und der Generator von $(S(t))$ ist der Operator $A_{n-1}+B$ mit maximalem Definitionsbereich in E_n^A.

Beweis: 5.12 folgt aus Satz 5.11, wenn in 5.11 der Banachraum E_n^A zugrunde gelegt und von Satz 2.4 Gebrauch gemacht wird.□

In Korollar 5.12 ist folgender von Desch/Schappacher bewiesener Spezialfall enthalten.

Korollar 5.13 (Desch/Schappacher): Sei A Generator einer stark-stetigen Halbgruppe auf E und sei $(Z, \|\cdot\|_Z)$ ein Banachraum, so daß gilt:

(Z_1) Z ist stetig eingebettet in E.

(Z_2) Es gibt ein $t_0>0$, so daß für alle stetigen Funktionen $\phi: [0,t_0] \to Z$ gilt:
$\int_0^t T(t-s)\phi(s)ds \in D(A)$ für alle $t \in [0,t_0]$.

(Z_3) Es gibt eine monoton wachsende stetige Funktion γ mit $\gamma: [0,t_0] \to [0,\infty)$, $\gamma(0) = 0$ und
$\|\int_0^t T(t-s)\phi(s)ds\|^A \leq \gamma(t) \sup_{0\leq s\leq t} \|\phi(s)\|_Z$.

Dann ist für jeden Operator $B \in L(E_1^A, Z)$ (A+B) Generator einer stark-stetigen Halbgruppe auf E.

Beweis: 5.13 folgt unmittelbar aus Korollar 5.12 mit n=1, denn für u aus $(E_1^A)\hat{}$ ist unter den Voraussetzungen (Z_1) und $B \in L(E_1^A, Z)$ das Element Bu eine stetige Funktion von $[0,t_0]$ nach Z.

(Z_2) und (Z_3) bewirken, daß der im Sinne von 5.5 definierte Operator V_r für $r \leq t_0$ ein Element aus $L((E_1^A)\hat{})$ ist mit

$$\|V_r\| \to 0 \text{ für } r \to 0,$$

woraus die Behauptung mit Korollar 5.12 folgt. □

Desch/Schappacher wandten ihren Satz an auf den Fall, daß Z die in 3.1 definierte Favard-Klasse F ist. Dies kann nun leicht mit Hilfe von Korollar 5.12 und Satz 3.3 verallgemeinert werden.

Satz 5.14: Sei A Generator der Halbgruppe (T(t)) auf E und sei $B \in L(E_{n+1}^A, F_n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist (A_n+B) mit Definitionsbereich E_{n+1}^A Generator einer Halbgruppe auf E_n^A.

Beweis: Für $u \in (E_{n+1}^A)\hat{}$ folgt:

(1) $\int_0^t T_n(t-s)Bu(s)ds \in F_n$ nach Satz 3.3(3).

(2) Zu $Bu \in (F_n)\hat{}$ gibt es eine gegen Bu konvergierende Folge $(u_k) \subset (F_n)\hat{}$ mit $(u_k') \subset (F_n)\hat{}$, wobei u_k' die Ableitung von u_k ist.
Für jedes u_k und jedes $t>0$ ist $\int_0^t T_n(t-s)u_k(s)ds \in E_{n+1}^A$, denn für $t \geq h > 0$ gilt

$$\frac{1}{h}(T_n(h) - Id)\int_0^t T_n(s)u_k(t-s)ds$$
$$= \frac{1}{h}(\int_h^{t+h} T_n(s)u_k(t+h-s)ds - \int_0^t T_n(s)u_k(t-s)ds)$$
$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T_n(s)u_k(t+h-s)ds - \frac{1}{h}\int_0^h T_n(s)u_k(t-s)ds$$
$$+ \int_h^t T_n(s)\frac{1}{h}(u_k(t+h-s) - u_k(t-s))ds.$$

Da $u_k' \in \hat{(F_n)}$ ist, existiert für alle drei Terme der Grenzwert in E_n^A für $h \to 0$, weshalb $\int_0^t T_n(t-s)u_k(s)ds \in E_{n+1}^A$ ist.

(3) Die Verwendung von Satz 3.3(3) und Lemma 3.2(a) ergibt

$$\|\int_0^t T_n(t-s)u_k(s)ds\|_{n+1}^A = \|\int_0^t T_n(t-s)u_k(s)ds\|_n^F$$
$$\leq \int_0^t \|T_n(t-s)\|_{F_n,F_n} \|u_k\| ds \leq ctMe^{\omega t} \quad \text{mit } c>0, \qquad (*)$$

denn (u_k) ist als in $\hat{(F_n)}$ konvergente Folge auch beschränkt in $\hat{(F_n)}$. Dabei ist $\|T_n(t-s)\|_{F_n,F_n}$ die Operatornorm von $T_n(t-s)$ in F_n.

(4) Da (u_k) Cauchy-Folge in $\hat{(F_n)}$ ist, folgt wie in (3) für $r \geq k$ und $r,k \to \infty$

$$\|\int_0^t T_n(t-s)(u_k(s) - u_r(s))ds\|_{n+1}^A \leq tMe^{\omega t}\|u_k - u_r\| \to 0.$$

Somit existiert $\lim_{k\to\infty} \int_0^t T_n(t-s)u_k(s)ds$ in E_{n+1}^A und die Abschätzung (*) gilt auch für den Grenzwert.

(5) Da die $\|\cdot\|_n^F$-Norm gröber ist als die $\|\cdot\|_{n+1}^A$-Norm, folgt mit (1) und (*)

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^t T_n(t-s)u_k(s)ds = \int_0^t T_n(t-s)Bu(s)ds \quad \text{und}$$
$$\|\int_0^t T_n(t-s)Bu(s)ds\|_{n+1}^A \leq ctMe^{\omega t}. \qquad (5.14.1)$$

Damit erfüllt der mittels B definierte Operator V_r die Voraussetzungen von Korollar 5.12 für den Raum E_{n+1}^A, wenn $r>0$ genügend klein gewählt wird, womit (A_n+B, E_{n+1}^A) Generator einer stark-stetigen Halbgruppe auf E_n^A ist. □

Diejenigen Störungen B, welche die Voraussetzungen von 5.12 erfüllen, zeichnen sich durch besondere Eigenschaften aus.

Korollar 5.15: Sei A der Generator der Halbgruppe $(T(t))$ und es seien die Voraussetzungen von Korollar 5.12 erfüllt. Dann gilt:

(1) Für jedes $\alpha\in\mathbb{C}$ erfüllt der mittels αB definierte Operator V_r die Voraussetzungen von 5.12; d.h. $A_{n-1}+\alpha B$ mit maximalem Definitionsbereich in E_n^A ist Generator einer Halbgruppe auf E_n^A.

(2) Für die von $(A_{n-1}+B, D(A_{n-1}+B))$ auf E_n^A erzeugte Halbgruppe $(S(t))$ gilt $\|S(t)-T_n(t)\|_{n,n} \to 0$ für $t \to 0$.

Beweis: (1) ist klar, denn für alle $u\in(E_n^A)\hat{}$ gilt

$$\int_0^t T_{n-1}(t-s)\alpha Bu(s)ds = \alpha\int_0^t T_{n-1}(t-s)Bu(s)ds.$$

(2) Aus Gleichung (5.4) folgt für alle $x\in E_n^A$ und $t\geq 0$

$$\|S(t)x-T_n(t)x\| = \|\int_0^t T_{n-1}(t-s)BS(s)xds\|$$
$$\leq \|V_t\|\|S(\cdot)x\| \leq \|V_t\|M'e^{\omega' t}\|x\|_n^A,\ M',\omega'\in\mathbb{R}.$$

Wegen $\|V_t\| \to 0$ für $t \to 0$ folgt die Behauptung. □

Sind insbesondere die Voraussetzungen von Satz 5.14 erfüllt, dann gilt aufgrund der Ungleichung (5.14.1)

$$\|S(t)\|_{n,n} \leq Me^{\omega_1 t}$$

für ein $\omega_1\in\mathbb{R}$, d.h. man kommt bei der Halbgruppe $(S(t))$ mit der gleichen Konstante M aus wie bei $(T(t))$, was besonders interessant ist, wenn M = 1 gewählt werden kann, da dann $(A_{n-1}+B) - \omega_1 Id$ ein dissipativer Operator von $D(A_{n-1}+B)$ nach E_n^A ist.

Ein weiteres hinreichendes Kriterium für die Gültigkeit von 5.12 ist die folgende Bedingung.

Korollar 5.16: Sei $n\in\mathbb{Z}$ und $B\in\mathcal{L}(E_n^A,E_{n-1}^A)$. Wenn es ein $r>0$ gibt, so daß für alle s mit $0<s\le r$ gilt:

(1) $(T_{n-1}(s)B)(E_n^A)\subset E_n^A$,

(2) $T_{n-1}(s)B$ ist stetig fortsetzbar zu einem Element aus $\mathcal{L}(E_n^A)$,

(3) $\int_0^r \|T_{n-1}(s)B\|_{n,n}ds < +\infty$,

dann ist $(A_{n-1}+B,D(A_{n-1}+B))$ Generator einer stark-stetigen Halbgruppe $(S(t))$ auf E_n^A und $A_{n-1}+B$ mit Definitionsbereich E Generator der Halbgruppe $(S_{-1}(t))$ auf E_{n-1}^A.

Beweis: Für den gemäß 5.5 definierten Operator V_r gilt für $u\in(E_n^A)\hat{}$ und $0\le t\le r$ aufgrund von (1)-(3)

$$\|V_r\| \le \sup_{0\le t\le r}\int_0^t \|T_{n-1}(t-s)B\|_{n,n}\|u\|ds .$$

Damit geht $\|V_r\|\to 0$, wenn $r\to 0$ geht, womit aus Korollar 5.12 die Behauptung folgt. □

Die folgenden Beispiele erläutern Korollar 5.16.

Beispiele 5.17: (a) Ist $B\in\mathcal{L}(E_n^A)$, dann sind die Voraussetzungen von Korollar 5.16 erfüllt (siehe auch Theorem 4.3 und die Korollare 4.4 und 4.5).

(b) Auf die Bedingung 5.16(3) kann i.a. nicht verzichtet werden, denn wenn A unbeschränkter Generator einer holomorphen Halbgruppe ist und $B:=\alpha A$ gesetzt wird für $0\neq\alpha\in\mathbb{C}$, dann gilt zwar 5.16(1),(2), nicht aber (3) (für n=1). Würde 5.16(3) gelten, dann wäre $(1+\alpha)A_{n-1}$ Generator für alle $\alpha\in\mathbb{C}$, was der Unbeschränktheit von A widerspricht.

6. Anwendungen und Beispiele

Im folgenden sei $(A,D(A))$ Generator einer stark-stetigen Halbgruppe auf dem Banachraum E. Als erstes werden einige Gegenbeispiele für Operatoren B gebracht, die im Sinne von Lemma 5.1 bzw. Korollar 5.2 unzulässige Störungen der Generatoren A bzw. A_1 sind.

Beispiel 6.1: (a) Sei $E:=C_0(\mathbb{R})$ und sei $Bf:= qf$ mit $q\in L^\infty(\mathbb{R})$. Ist q nicht stetig, dann kann A+B nicht Generator einer Halbgruppe auf E_1^A sein, denn sonst müßte B dicht definiert in E sein nach Korollar 5.2, was offensichtlich nicht der Fall ist.

(b) Sei $E:=C_0(\mathbb{R})$ und $Bf:= \mu(f)g$, wobei $g\notin E_{-1}^A$ und $\mu\neq 0$ eine (nicht notwendigerweise stetige) Linearform auf E ist. Der maximale Definitionsbereich von B in E_{-1}^A ist dann die Menge aller $f\in E$ mit $\mu(f)=0$. Ist $\mu\in E'$, dann ist diese Menge nicht dicht in E und A+B kann kein Generator einer Halbgruppe auf E sein gleich wie D(A+B) gewählt wird. Für $Af:= f'$ setze beispielsweise $g(x):= x$.

Komplizierter ist es, wenn $\mu\in(E_n^A)'$ ist für ein $n>0$. Dann ist der Kern von μ in E_n^A zwar nicht dicht in E_n^A, aber er kann in E dicht liegen. Das ist beispielsweise der Fall, wenn A als die erste oder zweite Ableitung ist und μ durch $\mu(f):= f'(0)$ definiert wird.

(c) Sei $E:= L^1(\mathbb{R})$, $Af:= f'$ und $Bf:= (\int_0^1 xf(x)dx)\cdot q$. Dabei sei $q(x):= x^{-1}$ für $0<x\leq 1$ und $q(x):= 0$ sonst. Dann ist q zwar nicht aus E, aber aus E_{-1}^A, da q die fast überall definierte Ableitung einer integrierbaren Funktion ist. Damit ist der

maximale Definitionsbereich von B in E die Menge aller $f \in E$, für die $\int_0^1 x f(x)\,dx = 0$ ist. Diese Menge ist nicht dicht in E, wodurch kein Definitionsbereich von A+B existiert, so daß A+B Generator einer Halbgruppe auf E_1^A wird.

Definieren wir für dieselbe Funktion q den Operator B durch $Bf := qf$, dann ist B dicht in E und damit auch in E_{-1}^A definiert und Lemma 5.1 läßt sich im Gegensatz zur Situation in Teil (a) hier nicht verwenden.

Ein positives Beispiel für die Situation in Korollar 5.2 ist das folgende.

Beispiel 6.2: Sei $E := C_0(\mathbb{R})$ wie in Beispiel 6.1(a) und sei $Af := f'$ der Generator der Translationshalbgruppe auf E. Weiter sei $Bf := qf$ mit q aus E, aber q nicht überall stetig differenzierbar. Dann ist $B \in \mathcal{L}(E)$ und $(A+B, D(A))$ der Generator einer Halbgruppe auf E. Nach Korollar 4.5(2) ist A+B mit maximalem Definitionsbereich $(=: D_1)$ in E_1^A auch Generator einer Halbgruppe $(S(t))$ auf E_1^A. Insbesondere muß D_1 dicht in E liegen. Der maximale Definitionsbereich von B in E_1^A ist aber nicht dicht in E ist, weil q' nicht stetig ist. Daher gibt es Funktionen $f \in D_1$ mit $Af \notin E_1^A$, d.h. der Generator von $(S(t))$ ist nicht (A_1+B, E_2^A), sondern $(A+B, D_1)$, also wie in Korollar 5.2 "ums Eck" definiert.

Nun werden weitere Störungen B betrachtet, welche auf einer der Stufen E_n^A $(n \in \mathbb{Z})$ beschränkt sind, wobei die Korollare 4.4 und 4.5 zur Anwendung kommen. Eine allgemeine Methode zur Kon-

struktion von Elementen $B \in \mathcal{L}(E_n^A)$ für $n \neq 0$ ist die folgende.

Proposition 6.3: Sei $B \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \rho(A)$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann wird durch

(1) $B_n := (R(\lambda,A))^n B((\lambda-A)_{n-1})^n$ für $n>0$ und

(2) $B_n := ((\lambda-A)_n)^{-n} B((R(\lambda,A))_n)^{-n}$ für $n<0$

ein beschränkter Operator auf E_n^A definiert.

Beweis: Folgt aus der Konstruktion der Banachräume E_n^A in Kapitel 1 und der Tatsache, daß für die Definition der Norm $\|\cdot\|_n^A$ nach Lemma 1.6 jedes $\lambda \in \rho(A)$ gleichberechtigt ist. □

Es ist klar, daß wir mit dieser Methode alle Elemente aus $\mathcal{L}(E_n^A)$ erhalten. Ist $B \in \mathcal{L}(E)$ und $\lambda \in \rho(A)$, dann ist insbesondere folgender für alle $f \in E_1^A$ definierte Operator

$$B_1 f := \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) B(\lambda-A) f dt$$

ein Element aus $\mathcal{L}(E_1^A)$. Ferner ist der mittels desselben B für alle f aus der in E_{-1}^A dichten Menge E definierte Operator

$$B_{-1} f := A_{-1} B \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) f dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} A_{-1} B T(t) f dt \qquad (*)$$

stetig zu einem Operator aus $\mathcal{L}(E_{-1}^A)$ fortsetzbar. Ein Spezialfall wurde schon in Beispiel 4.10(a) behandelt. Dort war B selbst stetig fortsetzbar auf E_{-1}^A, was im nächsten Beispiel nicht der Fall ist.

Beispiel 6.4: Für $1 \leq p < \infty$ sei A der Generator der Translationshalbgruppe auf $L^p(\mathbb{R})$ und $Bf := qf$, wobei $q \in L^\infty(\mathbb{R})$ eine stetig differenzierbare Funktion ist. Ist B_{-1} der in (*) mittels A, λ und B definierte Operator aus $\mathcal{L}(E_{-1}^A)$, dann gilt für $f \in E_1^A$

$$B_{-1} f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (A_{-1} B T(t) f)(x) dt$$

$$= q'(x)\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x+t)\,dt + q(x)\int_0^\infty e^{-\lambda t} f'(x+t)\,dt, \text{ d.h.}$$

$$B_{-1}f = q'R(\lambda,A)f + qR(\lambda,A)Af.$$

Nun ist zwar der für $f\in E_1^A$ durch $f \to qR(\lambda,A)Af$ definierte Operator stetig fortsetzbar zu einem Element aus $L(E)$, aber der durch $f \to q'R(\lambda,A)f$ definierte Operator i.a. nicht, wenn q' nicht aus $L^\infty(\mathbb{R})$ ist, da der mittels q' definierte Multiplikator i.a. nicht aus $L(E_1^A,E)$ ist; dazu wähle q beispielsweise als $q(x) := \sin(x^2)$. In einem solchen Falle ist $B_{-1}\notin L(E)$.

Andererseits ist nach Korollar 4.5 der Operator $A_{-1}+B_{-1}$ mit Definitionsbereich E Generator einer Halbgruppe $(S(t))$ auf E_{-1}^A. Mit 4.5(2) folgt, daß $A_{-1}+B_{-1}$ mit maximalem Definitionsbereich in E $(=E_2^{(A_{-1}+B_{-1})})$ wiederum Generator einer Halbgruppe $(S_1(t))$ auf E ist.

Ist nun B_{-1} eingeschränkt auf E_1^A nicht aus $L(E_1^A,E)$, dann ist $E_1^A \neq E_2^{A_{-1}+B_{-1}}$, da sonst $(A_{-1}+B_{-1})_1 = A + B_{-1}$ wäre, woraus wegen Lemma 4.6 ein Widerspruch entstehen würde.

Die in Proposition 6.3 eingeführte Methode stößt schnell an gewisse Grenzen, denn sie erfordert eine explizite Darstellung von $R(\lambda,A)$, was i.a. schwierig ist. Eine bestimmte Klasse auf E_n^A beschränkter Operatoren läßt sich leichter explizit angeben, vergleiche auch mit Beispiel 4.7.

Proposition 6.5: Seien $n\in\mathbb{Z}$, $\mu\in(E_n^A)'$ $(=(E')_{-n}^{A'}$ nach 1.18) und $g\in E_n^A$. Dann wird für $f\in E_n^A$ durch

$$Bf := \mu(f)g$$

ein stetiger Operator auf E_n^A definiert, denn es gilt

$$\|Bf\|_n^A \leq \|\mu\| \cdot \|f\|_n^A \cdot \|g\|_n^A.$$

Daher ist auch der Operator C mit $Cf := \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(f) g_k$ mit $\mu_k \in (E_n^A)'$, $g_k \in E_n^A$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \|\mu_k\| \|g_k\|_n^A < \infty$ ein Element aus $L(E_n^A)$.

Beispiel 6.6: (a) Sei $E := C_0(\mathbb{R})$ und A mit $Af := f'$ der Generator der Translationshalbgruppe. Mit A ist auch A_1 ein dissipativer Operator (auf E_1^A) wegen 2.4(1). Für jedes $B \in L(E_1^A)$ ist der Operator $A - \|B\|_{1,1} \cdot Id$ ebenfalls dissipativ, denn mit dem Störungssatz von Phillips und Korollar 4.4 folgt für die von A_1+B erzeugte Halbgruppe $(S(t))$

$$\|S(t)\|_{1,1} \leq e^{t\|B\|_{1,1}} \text{ für alle } t \geq 0.$$

Für die Abschätzung der Halbgruppe $(S(t))$ kann also die Konstante M gleich 1 gewählt werden, während das für die von A+B mit Definitionsbereich D(A) nach Korollar 4.5 auf E erzeugte Halbgruppe $(S_{-1}(t))$ i.a. nicht mehr gilt, wie folgendes Beispiel zeigt. Dazu sei der Operator B definiert durch

$$Bf := f'(0)g \text{ mit } 0 \neq g \in E_1^A \text{ und } f \in E_1^A.$$

Dann ist $\|B\|_{1,1} = \|g\|_1^A$. Wird für ein reelles $f \in E_1^A$ $(f \geq 0)$ als Dualitätsabbildung j(f) die Punktauswertung in einem Punkte x_0, in dem f sein Maximum annimmt, gewählt, dann gilt

$$\langle (A+B)f, j(f) \rangle = f'(x_0) + f'(0)g(x_0) = f'(0)g(x_0).$$

Ist $g(x_0) \neq 0 \neq x_0$, dann kann $\langle (A+B)f, j(f) \rangle$ durch eine Abänderung von f, welche j(f) nicht beeinflußt, jeden Wert in $\mathbb{R}$ annehmen. Damit existiert kein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß $A+B-\lambda$ dissipativ ist, was wiederum impliziert, daß es kein $\omega < \infty$ gibt mit

$$\|S_{-1}(t)\|_{0,0} \leq e^{\omega t} \text{ für alle } t \geq 0.$$

Beispiel 6.7: (a) Seien $E := L^1(\mathbb{R}, d\nu)$, wobei ν das Lebesgue-Maß ist. Sei A der durch $Af := f'$ definierte Generator der Transla-

tionshalbgruppe auf E. Nach Satz 3.6 ist D(A') die Favard-Klasse F^* des Operators A*, wobei A* der Generator der Linkstranslationshalbgruppe auf UCB(ℝ), d.h. dem Raum der gleichmäßig stetigen beschränkten Funktionen auf ℝ, versehen mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm, ist.

Wähle $h \in UCB(\mathbb{R})$ mit $h' \in L^\infty(\mathbb{R})$, d.h. h ist Lipschitz-stetig und damit aus D(A'). Sei g die Ableitung einer (fast überall) differenzierbaren $L^1(\mathbb{R})$-Funktion, so daß $g \notin L^1(\mathbb{R})$ ist. Definiere für alle $f \in E$ den Operator B durch

$$Bf := (\int_{\mathbb{R}} f\bar{h}d\nu)g.$$

Dann ist B nach Proposition 6.5 stetig fortsetzbar zu einem Element aus $L(E^A_{-1})$ und $A_{-1}+B$ mit Definitionsbereich E erzeugt nach Korollar 4.5(1) eine Halbgruppe (S(t)) auf E^A_{-1}. Nun besteht $D(A) \cap D(B)$ genau aus denjenigen Elementen $f \in D(A)$, welche orthogonal zu h sind. Nach 4.5(2) ist $A_{-1}+B$ mit maximalem Definitionsbereich in E Generator der auf E definierten Halbgruppe $(S_1(t))$.

Wähle g speziell als $g(x) := \chi_{(0,1]}\, x^{-1}$. Dann muß jedes f aus $D((A_{-1}+B)_1)$ die Form

$f = f_1 - (\int_{\mathbb{R}} f\bar{h}d\nu)R(\lambda,A)_{-1}g$ mit $f_1 \in E^A_1$ haben, d.h. es gilt

$f = f_2 + \alpha\chi_{(0,1]}\ln$ für ein (von f abhängiges) $f_2 \in E^A_1$ und ein $\alpha \in \mathbb{C}$. Dabei ist ln die Logarithmus-Funktion zur Basis e.

(b) Sei $E := C_0(\mathbb{R})$ und A der Generator der Translationshalbgruppe auf E. Dann ist $E^* = L^1(\mathbb{R})$ und nach Satz 3.6 ist D(A') die Favard-Klasse F^* des Generators A* der Linkstranslationshalbgruppe auf $L^1(\mathbb{R})$ und F^*_{-1} ist gleich E'.

Für $f \in E$ sei folgender Operator B definiert:

$$Bf := \sum_{n=0}^{\infty} (n^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}} f g_n d\nu \cdot h_n).$$

Dabei seien $\alpha > 1$, $\|h_n\|_{-1}^{A} \leq 1$, $g_n \in L^1(\mathbb{R})$ mit $g_n' \in E'$ und es gelte $\|g_n\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 1$.

Dann ist B stetig fortsetzbar zu einem Element aus $L(E_{-1}^{A})$. Beispielsweise wähle $g_n(x) := nx$ $(0 \leq x \leq \frac{1}{n})$ und $g_n(x) := 0$ sonst sowie $h_n := a_n(q_n)'$, wobei a_n ein Normierungsfaktor und $q_n \in E$ eine fast überall stetig differenzierbare Funktion ist, z.B.

$q_n(x) := (n^2 - x^2)^{1/2}$ für $-n \leq x \leq n$ und $q_n(x) := 0$ sonst.

Mit Hilfe von Satz 4.12, Satz 5.11 und Satz 5.14 können aber auch Störungen B zugelassen werden, die auf keiner Stufe des vom Generator A erzeugten Sobolev-Turms beschränkt sind. Beispiele dafür sind Operatoren B von der Form $Bf := \mu(f)g$ mit $\mu \in (E_1^A)'$ und $g \in E$, aber $g \notin E_1^A$. Ist E reflexiv, dann haben solche Operatoren bezüglich A relative Schranke 0 (P.Hess), während das in nicht-reflexiven Räumen i.a. falsch ist, wie folgende Beispiele zeigen.

Beispiele 6.8: (a) Sei $E := C_0(\mathbb{R})$ und $Af := f'$ mit maximalem Definitionsbereich. Für $f \in E_1^A$ definiere

$$Bf := f'(0)g$$

mit $g(x) := x^{1/2}$ für $0 < x \leq 1$, $g(x) := 2 - x$ für $1 \leq x \leq 2$ und $g(x) := 0$ sonst. Dann ist $B \notin L(E_1^A)$ und B hat bezüglich A relative Schranke 1, vergleiche auch mit dem Kommentar im Anschluß an Proposition 4.11.

(b) Seien E und g wie in (a) und sei $Af := f''$ mit maximalem Definitionsbereich. Definiere B mit $Bf := f''(0)g$. Dann hat B wieder relative Schranke ungleich null bezüglich A.

(c) Sei $E:= L^1(\mathbb{R})$ mit $Af:= f'$ der Generator der Translationshalbgruppe auf E. Sei $Bf:= (\int_0^1 f'(s)ds)\cdot g$ für $f\in D(A)$, wobei g definiert sei als $g:= \chi_{(0,1)}\ln$. Dabei ist ln die Logarithmusfunktion zur Basis e. Wiederum ist $B\notin L(E_1^A)$ und B hat bezüglich A relative Schranke 1.

Werden aber bestimmte Linearformen zur Definition von B gewählt, dann hat B wieder relative Schranke 0 bezüglich A.

Korollar 6.9: Seien E* und A* der zum Generator A gemäß Satz 3.6 existierende abgeschlossene Unterraum von E' bzw. der Generator der Halbgruppe (T*(t)) auf E*. Sei $Bf:= \mu(f)g$ mit $g\in E$ und μ aus $(E^*)_{-1}^{A^*}$. Dann hat B relative Schranke 0 bezüglich A.

Beweis: Nach Voraussetzung über μ und wegen Satz 3.6 kann μ in der $\|\cdot\|_{-1}^{A'}$-Norm durch eine Folge aus E' (sogar aus E*) approximiert werden, wodurch der Beweis von Davies, Lemma 3.11 übernommen werden kann. □

Bemerkung 6.10: Entsprechendes gilt natürlich auch für endliche Linearkombinationen aus Operatoren B_k, k=1,2,..., welche den Voraussetzungen von Korollar 6.9 genügen. Weiterhin bleibt die Aussage in 6.9 gültig, wenn B in der $\|\cdot\|_{1,0}$-Norm durch Linearkombinationen solcher Operatoren B_k approximiert werden kann. Ist die von A erzeugte Halbgruppe holomorph und beschränkt, dann ist (A+B,D(A)) ebenfalls Generator nach dem schon in Kapitel 4 erwähnten Resultat von Kato(1). Aus Satz 4.12 ergibt sich aber noch eine weitergehende Folgerung.

Satz 6.11: Sei A Generator, $Bf := \mu(f)g$ mit $\mu \in (E_1^A)'$ und es sei $g \in E$. Dann folgt:

(1) $\|R(\lambda,A)B\|_{1,1} \to 0$ für $\lambda \to +\infty$.

(2) Ist A Generator einer beschränkten holomorphen Halbgruppe, dann ist $(A+B, D(A))$ Generator einer holomorphen Halbgruppe auf E.

Beweis: (1) Sei o.B.d.A. $\|f\|_1^A := \|(1-A)f\|$. Dann folgt für $\lambda > \omega$

$$\begin{aligned}\|R(\lambda,A)Bf\|_1^A &= \|(1-A)R(\lambda,A)Bf\| = \|(1-A)\mu(f)R(\lambda,A)g\| \\ &\leq |\mu(f)|\|R(\lambda,A)g\| + |\mu(f)|\|AR(\lambda,A)g\| \\ &\leq \|\mu\|\|f\|_1^A\left(\frac{M}{\lambda-\omega}\right)\|g\|_E + \|\mu\|\|f\|_1^A\|\lambda R(\lambda,A)g - g\|.\end{aligned}$$

Dabei ist $\|\mu\|$ die Norm von μ als Element von $(E_1^A)'$. Da $\lambda R(\lambda,A)$ für λ gegen $+\infty$ stark gegen die Identität konvergiert, folgt die Behauptung (1).

(2) Folgt sofort aus Satz 4.12. □

Mittels der in den Kapiteln 1 und 2 entwickelten Technik, d.h. insbesondere mit Satz 2.4 kann dieses Resultat sofort auf die Stufe E_n^A $(n \in \mathbb{Z})$ übertragen werden.

Korollar 6.12: Sei A Generator und $Bf := \mu(f)g$ mit $\mu \in (E_n^A)'$ und $g \in E_{n-1}^A$. Dann folgt:

(1) $\|R(\lambda,A)_{n-1}B\|_{n,n} \to 0$ für $\lambda \to +\infty$.

(2) Ist A Generator einer beschränkten holomorphen Halbgruppe, dann ist $A_{n-1}+B$ mit Definitionsbereich E_n^A Generator einer holomorphen Halbgruppe auf E_{n-1}^A.

Beweis: (1) ergibt sich aus Satz 2.4, indem der Beweis von Satz 6.11 in der $\|\cdot\|_n^A$-Norm anstatt in $\|\cdot\|_1^A$-Norm durchgeführt wird.

(2) Wegen 2.4(4) kann der Beweis von Satz 4.12 mit der $\|\cdot\|_n^A$- und der $\|\cdot\|_{n-1}^A$-Norm anstelle der $\|\cdot\|_1^A$- und der $\|\cdot\|_E$-Norm identisch übernommen werden, woraus mit (1) die Behauptung folgt. □

Wie die Gegenbeispiele von Desch/Schappacher zeigen, gibt es Störungen endlichen Ranges, die die Generatoreigenschaft zerstören. Stellen wir aber gewisse Anforderungen an die Funktion g, dann läßt sich mit Satz 5.14 auch für nicht-holomorphe Halbgruppen eine positive Antwort geben.

Korollar 6.13: Sei A Generator und für alle $f\in E_{n+1}^A$ sei der Operator B definiert durch $Bf:= \mu(f)g$ mit $\mu\in(E_{n+1}^A)'$ und $g\in F_n$. Dann ist A_n+B mit Definitionsbereich E_{n+1}^A Generator einer Halbgruppe auf E_n^A.

Beweis: B ist aus $\mathcal{L}(E_{n+1}^A, F_n)$, denn es gilt

$$\|Bf\|_n^F \leq \|\mu\|\|g\|_n^F\|f\|_{n+1}^A \text{ für alle } f\in E_{n+1}^A.$$

Mit Satz 5.14 folgt die Behauptung. □

Beispiele 6.14: (a) Sei $E:= C_0(\mathbb{R})$ und A mit $Af:=f''$ der Generator der eindimensionalen Diffusionshalbgruppe. Setze

$$Bf:= \sum_{n=0}^{\infty} a_n f''(n) g_n$$

mit $g_n\in E$, $\|g_n\| \leq 1$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$.

Dann ist (A+B,D(A)) Generator einer holomorphen Halbgruppe auf

E, denn wenn $B_k f := \sum_{n=0}^{k} a_n f''(n) g_n$ gesetzt wird, dann folgt

$$\|(B_k - B)f\| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| \|Af\| \cdot \|g_n\|$$
$$\leq c\left(\sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|\right) \cdot \|f\|_1^A \to 0 \text{ für } k \to \infty \ (c>0).$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz 6.11 in Verbindung mit Bemerkung 6.10.

(b) Seien E und A wie in (a) und $Bf := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu_n(f) g_n$, wobei $(g_n) \subset E_{-1}^A$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ und $(\mu_n) \subset E'$ sind mit $\|g_n\| \leq d < \infty$ und $\|\mu_n\|_{E'} \leq d' < \infty$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann kann der Operator B wie in Teil (a) in der $\|\cdot\|_{0,-1}$-Norm durch Operatoren endlichen Ranges approximiert werden, wodurch mit Korollar 6.12 folgt, daß $A_{-1}+B$ mit Definitionsbereich E Generator einer holomorphen Halbgruppe $(S(t))$ auf E_{-1}^A ist. Wegen $D(A_{-1}+B) = E$ ist $(S_1(t))$ eine holomorphe Halbgruppe auf E mit Generator $(A_{-1}+B)_1$, wobei $D((A_{-1}+B)_1)$ der maximale Definitionsbereich von $A_{-1}+B$ in E ist.

(c) Sei $E := L^1(\mathbb{R})$ und A der Generator der Translationshalbgruppe auf E. Für $G := C_0(\mathbb{R})$ ist $G^* = E$ und für jeden Operator $B\in\mathcal{L}(E,G')$ gilt nach Satz 3.6 und Satz 5.14:

> $A_{-1}+B$ mit Definitionsbereich E ist Generator einer Halbgruppe $(S(t))$ auf E_{-1}^A und $(S_1(t))$ ist eine Halbgruppe auf E mit Generator $(A_{-1}+B)_1$ (= $A_{-1}+B$ mit maximalem Definitionsbereich in E).

Für alle f aus $D((A_{-1}+B)_1)$ gilt damit $A_{-1}f + Bf \in E$. Ein Beispiel für ein solches B ist $Bf := (\int_{\mathbb{R}} f\bar{g}d\nu)\cdot\delta_0$ mit $g\in L^\infty(\mathbb{R})$, $f\in E$.

Ist A der Generator einer stark-stetigen Halbgruppe auf $L^1(\mathbb{R})$ oder $C_0(\mathbb{R})$, dann kann dieses für den Operator A* an einem Beispiel erläuterte Resultat allgemein formuliert werden.

Korollar 6.15: Sei E wieder einer der beiden Räume $L^1(\mathbb{R})$ oder $C_0(\mathbb{R})$ und sei $(A,D(A))$ Generator einer Halbgruppe $(T(t))$ auf E und $(T^*(t))$ die durch den Operator $(A^*,D(A^*))$ auf dem in E' abgeschlossenen Unterraum E* erzeugte Halbgruppe. Dann gilt mit Satz 5.14 und Satz 3.6:

(1) Ist $E = L^1(\mathbb{R})$, dann ist für alle Operatoren $B \in \mathcal{L}(E^*, L^\infty(\mathbb{R}))$ der Operator $A^*_{-1}+B$ mit Definitionsbereich E* Generator einer Halbgruppe auf E^*_{-1} und $A^*_{-1}+B$ ist mit maximalem Definitionsbereich in E* Generator einer Halbgruppe auf E*.

(2) Ist $E = C_0(\mathbb{R})$, dann ist für alle Operatoren $B \in \mathcal{L}(E^*, BV(\mathbb{R}))$ der Operator $A^*_{-1}+B$ Generator einer Halbgruppe auf E^*_{-1} und mit dem in E* maximalen Definitionsbereich ist $A^*_{-1}+B$ Generator einer Halbgruppe auf E*. Dabei ist $BV(\mathbb{R})$ der Raum aller regulären Borel-Maße auf $\mathbb{R}$ mit beschränkter Totalvariation.

□ □ □

Literaturverzeichnis

1. Adams, R.A., Sobolev Spaces, London-New York-San Francisco, Academic Press 1975.

2. Arendt, W., Generators of Positive Semigroups and Resolvent Positive Operators, Habilitationsschrift, Universität Tübingen 1985.

3. Beals, R., On the Abstract Cauchy Problem, J. Funct. Anal. 10 (1972), p. 281-299.

4. Birman, M.S./Solomjak, M.Z., Quantitative Analysis in Sobolev Imbedding Theorems and Applications to Spectral Theory, Amer. Math. Soc. Translations Series 2 114 (1980), Providence (R.I.).

5. Butzer, P.L./Berens, H., Semi-Groups of Operators and Approximation, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1967.

6. Chernoff, P.R., Perturbations of Dissipative Operators with Relative Bound One, Proc. Amer. Math. Soc. 33 (1972), p. 72-74.

7. Coulhon, T., Suites d'opérateurs sur un espace C(K) de Grothendieck, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. 1, t. 298 (1984), p. 13-15.

8. Da Prato, G./Grisvard P.(1), Equations d'évolution abstraites non linéaires de type parabolique, Annali Mat. Pura ed Appl. 70 (1979), p. 329-396.

9. Da Prato, G./Grisvard P.(2), Maximal Regularity for Evolution Equations by Interpolation and Extrapolation, J. Funct. Analysis 58 (1984), p. 107-124.

10. Davies, E.B., One-parameter Semigroups, London-New York-San Francisco, Academic Press 1980.

11. Desch, W./Schappacher, W., On Relatively Bounded Perturbations of Linear C_0-semigroups, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa 11 (1984), p. 327-341.

12. Dunford, N./Schwartz, J.T., Linear Operators, Part 1: General Theory, New York, Wiley 1958.

13. Engel, K.-J., Operatormatrizen und Halbgruppen, Diplomarbeit, Universität Tübingen 1985.

14. Fattorini, H.O., The Cauchy Problem, Reading (Mass.), Addison-Wesley 1983.

15. Favard, J., Sur l'approximation dans les espaces vectoriels, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 29 (1949), p. 259-291.

16. Goldberg, S., Unbounded Linear Operators, Theory and Applications, Series in Higher Math., New York, McGraw-Hill 1966.

17. Hess, P., Zur Störungtheorie linearer Operatoren: Relative Beschränktheit und relative Kompaktheit von Operatoren in Banachräumen, Comm. Math. Hel. 44 (1969), p. 245-248.

18. Hille, E./Phillips, R.S., Functional Analysis and Semigroups, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 31, Providence (R.I.) 1957.

19. Johnson, B.E., Perturbations of Semigroups, Quaterly J. Math. Oxford, 2nd series 36 (1985), p. 315-324.

20. Kato, T.(1), Perturbation Theory for Linear Operators, (2nd Printing), Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1976.

21. Kato, T.(2), On Some Schrödinger Operators with a Singular Complex Potential, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa 5 (1978), p. 105-114.

22. Krein, S.G., Linear Differential Equations in Banach Space, Amer. Math. Soc. Translations 29, Providence (R.I.) 1971.

23. Konishi, Y., A Remark on Perturbation of m-accretive Operators in Banach Space, Proc. Jap. Acad. 47 (1971), p. 452-455.

24. Ljubic, Ju.I., Conditions for the Uniqueness of the Solution of Cauchy's Abstract Problem, Dokl. Nauk. SSSR 130 (1960), p. 969-972. Engl. transl. in Soviet Math. Dokl. 1 (1960), p. 110-113.

25. Lotz, H.P., Uniform Convergence of Operators on L^{∞} and Similar Spaces, Math. Z. 190 (1985), p. 207-220.

26. Lumer, G., Semi-inner-product Spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 100 (1960), p. 29-43.

27. Lumer, G./Phillips R.S., Dissipative Operators in a Banach Space, Pac. J. Math. 11 (1961), p. 679-698.

28. Nagel, R.(1), Sobolev Spaces and Semigroups, Semesterbericht Funktionalanalysis, Sommersemester 1983, Tübingen.

29. Nagel, R.(2) (editor), One-parameter Semigroups of Positive Operators, Lecture Notes in Mathematics No. 1184, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1986.

30. Okazawa, N.(1), Singular Perturbations of m-accretive Operators, J. Math. Soc. Japan 32(1) (1980), p. 19-44.

31. Okazawa, N.(2), On the Perturbation of Linear Operators in Banach and Hilbert Spaces, J. Math. Soc. Japan 34 (4) (1982), p. 677-701.

32. Pazy, A., Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1983.

33. Phillips, R.S., Perturbation Theory for Semi-Groups of Linear Operators, Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), p. 199-221.

34. Schaefer, H.H.(1), Topological Vector Spaces, 4th printing, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1980.

35. Schaefer, H.H.(2), Banach Lattices and Positive Operators, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1974.

36. Sobolev, S.L.(1), On a Theorem of Functional Analysis, Mat. Sb. (N.S.) 4(46) (1938), p. 471-497. Engl. transl. Amer. Math. Soc. Transl. Series 2, 34 (1963), p. 39-68.

37. Sobolev, S.L.(2), Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, Amer. Math. Soc. Transl. 7 (1963), Providence (R.I.).

38. Sobolev, S.L.(3), Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Oxford-London-Edinburgh-New York-Paris-Frankfurt, Pergamon Press 1964.

39. Sobolev, S.L.(4), Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik, Berlin, Akademie-Verlag 1964.

40. Sohr, H., Störungskriterien im reflexiven Banachraum, Math. Ann. 233 (1978), p. 75-87.

41. Voigt, J., On the Perturbation Theory for Strongly Continuous Semigroups, Math. Ann. 229 (1977), p.163-171.

Lebenslauf

10.11 1954	geboren in Giengen/Brenz als Sohn des Ingenieurs Rolf Walther und dessen Ehefrau Karin, geb. Schmidt-Lawrenz.
1961	Besuch der Grundschule in Gerstetten.
1965	Besuch des Hellensteingymnasium in Heidenheim a. d. Brenz.
1973	Reifeprüfung am Hellensteingymnasium.
1.10.1973-31.12.1974	Wehrdienst in Dornstadt.
April 1975	Mathematikstudium mit Nebenfach Wirtschaftswissenschaften in Tübingen.
seit 1980	verheiratet mit der Patentanwaltsgehilfin Ilse Walther, geb. Schall.
24.4.1981	Geburt der Tochter Milena.
August 1982	Diplomprüfung für Mathematik.
seit 1983	tätig als wissenschaftliche Hilfskraft an der Universität Tübingen und an der Fern-Universität Hagen.
16.4.1984	Geburt des Sohnes Julius.

Meine akademischen Lehrer im Fach Mathematik waren die Herren W.Beekmann, H.Heyer, R.Nagel, H.H.Schaefer, A.Schönhage, E. Siebert und M.Wolff, im Fach Wirtschaftswissenschaften die Herren S.Menrad, A.E.Ott und E.Schaich.